О построении аппроксимирующих функций характеристик малого числа систем

Хетагуров Я.А. <tshe@bk.ru>
Концерн АГАТ

Аннотация. Выявляется взаимное влияние характеристик на показатели системы, части, устройства посредством построения общих математических моделей (ММ), использующих одинаковые характеристики систем, частей, устройств. Для получения уравнений ММ применяются линейные и гиперболические аппроксимирующие зависимости, основанные на данных характеристик систем, частей и устройств, близких по назначению и применению.

Ключевые слова: характеристики систем, математические модели, аппроксимирующие зависимости

Проблема учета влияния большого числа факторов на основные показатели цифровых управляющих систем реального времени с вычислительными машинами на начальном этапе проектирования решается в основном выбором характеристик, которые комплексно учитывают области работы системы, требования к системе и затратам материальных ресурсов, выпускаемым системой продуктам и объемам их производства.

На величины этих характеристик оказывают влияние различные факторы, связанные с условиями построения системы и её частей, с производственными возможностями предприятия, с особенностями эксплуатации, внешними условиями (финансирование, сроки, важность системы), особенно с опытом ведущих разработчиков и субъективными условиями организации работы на предприятии или предприятиях, создающих систему.

Для выявления взаимного влияния характеристик на показатели системы, части, устройства будем осуществлять построение общих математических моделей (ММ), использующих одинаковые характеристики систем, частей, устройств. Для получения уравнений ММ применим линейные и гиперболические аппроксимирующие зависимости, использующие характеристики близких по назначению и применению систем, частей и устройств.

Выделим две группы ММ.

В первой группе используются ММ, связывающие две или три характеристики двух систем.

Во второй группе используются ММ, связывающие три или четыре характеристики трех систем.

Для повышения точности результатов увеличивается число пар или троек используемых близких по назначению систем.

Для выбранных наборов характеристик строятся в прямоугольной системе координат математические модели

первой группы $x= f(y)$ и $x= f(y,z)$

второй группы $x=f(y, z)$ и $x= f(y,z,q)$

При построении зависимостей в моделях первой группы по данным двух систем между двумя характеристиками $x= f(y)$ необходимы пары координат (точек) x1y1, x2y2,… xiyi,…; между тремя характеристиками $x= f(y,z)$ необходимы тройки координат для каждой точки x1y1Z1, x2y2Z2, … xiyiZi…Каждая точка представляет систему.

При построении зависимостей в моделях второй группы по данным трех систем между характеристиками $x=f(y, z)$ необходимы данные трех и более групп координат x1y1Z1, x2y2Z2, x3y3 Z3, … xiyi Zi, …; между четырьмя характеристиками $x= f(y,z,q)$ необходимы данные четырех координат для каждой точки x1y1Z1q1, x2y2Z2q2, x3y3Z3q3, … xiyiZiq….. Каждая тройка или четверка координат представляет одну систему.

Увеличение числа анализируемых систем в моделях первой группы для выбранных характеристик увеличивает соответственно количество пар или троек координат – точек, что обеспечивает возможность применения аппроксимирующих уравнений второго порядка для трех точек; третьего порядка для четырех точек. Увеличение порядка аппроксимирующих уравнений повышает точность решения аппроксимирующего уравнения. Однако увеличение степени уравнения существенно усложняет определение коэффициентов уравнения, а также повышает требования к точности представления характеристик.

Увеличение числа, анализируемых систем в моделях второй группы также приводит к увеличению порядка аппроксимирующих уравнений и существенно усложняет и увеличивает объемы вычислений для получения коэффициентов аппроксимирующего уравнения. Также усиливается влияние точности представления коэффициентов.

Используем для вычислений аппроксимирующих коэффициентов для 3-х систем (3-х точек) три уравнения (линейные или гиперболические) с усреднением получаемых коэффициентов.

Основным показателем, оценивающим качество аппроксимирующей зависимости, является точность соответствия вычисленной величины по аппроксимирующей формуле фактическому значению величины.

Оценка точности математической модели, представленной аппроксимирующей функцией, в теории эксперимента проводится с использованием 25 – 30 данных опытов. Для нашего применения это соответствует данным о 25 – 30 системах. Учитывая, что для построения аппроксимирующего выражения используются данные всего 2 – 5 систем, применение методов оценки точности из теории эксперимента для наших условий невозможно.

____

Рассмотрим аппроксимацию и оценки точности ММ первой группы с использованием двух систем с двумя или тремя характеристиками. При проведении аппроксимации применяются два вида уравнений: линейные и гиперболические.

Для выполнения линейной или гиперболической аппроксимации необходимы данные двух точек, характеризующие работу двух систем. При использовании двух характеристик в каждой системе точки имеют координаты x_1y_1, x_2y_2, при использовании трех характеристик – координаты точек $x_1y_1z_1$, $x_2y_2z_2$. На основе приведенных координат двух точек определяются две ММ с двумя аппроксимирующими коэффициентами, связывающие характеристики y=f(x) и y = f(x,z) и представляемые соответственно линейными уравнениями

$$y = a_1 x + a_0 \quad \text{и} \quad y = a_1 x + a_0 z$$

и гиперболическими уравнениями

$$y = \frac{a_0}{1 + a_1 x} \quad \text{или} \quad y = \frac{a_0 x}{1 + a_1 x}$$

и

$$y = \frac{a_0 z}{1 + a_1 x}$$

Определение коэффициентов при двух характеристиках системы производится, решая систему из двух уравнений.

Коэффициенты аппроксимации a0, a1 для линейной функции при двух характеристиках системы определяются решением системы уравнений:

$$\begin{cases} y_1 = a_1 x_1 + a_0 \\ y_2 = a_1 x_2 + a_0 \end{cases}$$

где

$$a_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

$$a_0 = \frac{y_2 x_1 - y_1 x_2}{x_1 - x_2}$$

При трех характеристиках систем определение коэффициентов a0, a1 производится решением системы уравнений

$$\begin{cases} y_1 = a_1 x_1 + a_0 z_1 \\ y_2 = a_1 x_2 + a_0 z_2 \end{cases}$$

где

$$a_1 = \frac{y_1 z_2 - y_2 z_1}{x_1 z_2 - x_2 z_1}$$

$$a_0 = \frac{y_2 x_1 - y_1 x_2}{x_1 z_2 - x_2 z_1}$$

Коэффициенты a0, a1 для гиперболической функции $y = \frac{a_0}{1 + a_1 x}$ при двух характеристиках систем определяются решением системы

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{a_0}{1 - a_1 x_1} \\ y_2 = \dfrac{a_0}{1 - a_1 x_2} \end{cases}$$

где

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{y_2 x_2 - y_1 x_1}$$

$$a_0 = \frac{y_1 y_2 (x_2 - x_1)}{y_2 x_2 - y_1 x_1}$$

Коэффициенты a0, a1 для гиперболической функции $y = \frac{a_0 x}{1 + a_1 x}$ определяются решением системы

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{a_0 x_1}{1 + a_1 x_1} \\ y_2 = \dfrac{a_0 x_2}{1 + a_1 x_2} \end{cases}$$

где

$$a_1 = \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_1 x_2 (y_1 - y_2)}$$

$$a_0 = \frac{y_1 y_2 (x_1 - x_2)}{x_1 x_2 (y_1 - y_2)}$$

При трех характеристиках системы эти коэффициенты определяются решением системы уравнений

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{a_0 z_1}{1 - a_1 x_1} \\ y_2 = \dfrac{a_0 z_2}{1 - a_1 x_2} \end{cases}$$

где

$$a_1 = \frac{y_1 z_1 - y_2 z_2}{y_1 x_1 z_2 - y_2 x_2 z_1}$$

$$a_0 = \frac{y_1 y_2 (x_1 - x_2)}{y_1 x_1 z_2 - y_2 x_2 z_1}$$

Для повышения точности получения коэффициентов аппроксимации линейного или гиперболического уравнения используются дополнительные системы (точки). На их основе, решая системы уравнений, определяются аппроксимирующие коэффициенты дополнительных уравнений. Суммируя эти одинаковые по наименованию коэффициенты уравнения, рассчитываются их средние значения. Использование средних значений коэффициентов уравнений (линейных или гиперболических), повышает точность решения.

Например, при наличии трех систем с тремя переменными и соответственно точек с координатами x1y1z1, x2y2z2, x3y3z3 строятся три системы линейных уравнений (x1y1z1, x2y2z2); (x2y2z2 , x3y3z3) и (x1y1z1, x3y3z3) для получения трех уравнений 1, 2, 3 (рис. 1) с использованием точек 1,2; 2,3 и 3.1

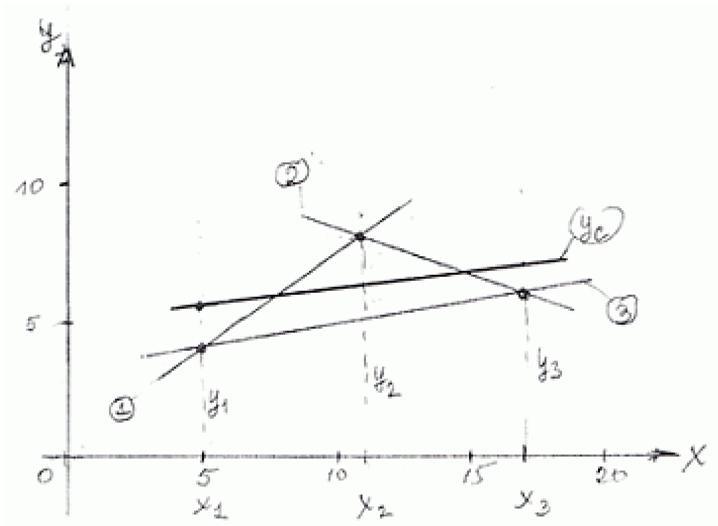

Рис 1

$$\begin{cases} y_1 = a_{11} x_1 + a_{01} z_1 \\ y_2 = a_{11} x_2 + a_{01} z_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2 = a_{12} x_2 + a_{02} z_2 \\ y_3 = a_{12} x_3 + a_{02} z_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = a_{13} x_1 + a_{03} z_1 \\ y_3 = a_{13} x_3 + a_{03} z_3 \end{cases}$$

где

$$a_{11} = \frac{y_1 z_2 - y_2 z_1}{x_1 z_2 - x_2 z_1} \qquad a_{01} = \frac{y_2 x_1 - y_1 x_2}{x_1 z_2 - x_2 z_1}$$

$$a_{12} = \frac{y_2 z_3 - y_3 z_2}{x_2 z_3 - x_3 z_2} \qquad a_{02} = \frac{y_2 z_3 - y_3 z_2}{x_2 z_3 - x_3 z_2}$$

$$a_{13} = \frac{y_3 z_1 - y_1 z_3}{x_3 z_1 - x_1 z_3} \qquad a_{03} = \frac{y_3 z_1 - y_1 z_3}{x_3 z_1 - x_1 z_3}$$

$$a_{03} = \frac{y_1x_3 - y_3x_1}{x_3z_1 - x_1z_3}$$

Для первой системы уравнений с данными y1x1z1 и y2x2z2 получим коэффициенты аппроксимации a11, a01.

Для второй системы уравнений с данными y2x2z2, y3x3 z3 – коэффициенты аппроксимации a12, a02.

Для третей системы уравнений y1x1z1, y3x3z3 – коэффициенты аппроксимации a13, a03.

Среднее значение коэффициентов аппроксимации запишем в виде

$$a_{1c} = \frac{\sum_1^3 a_{1i}}{3} \qquad a_{0c} = \frac{\sum_1^3 a_{0i}}{3}$$

и аппроксимирующую функцию с усредненными коэффициентами:

$$y_c = a_{1c}\,x + a_{0c}\,z$$

При четырех системах (точках) возможно построение до 6 линейных уравнений или гиперболических уравнений, использующих (для случая двух характеристик) следующие пары точек (x1y1, x2y2); (x2y2, x3y3); (x3y3, x4y4), (x1y1 , x4y4), (x3y3, x1y1), (x2y2 , x4y4) (1.2; 2.3; 3.4; 1.4; 3.1; 2.4).

При использовании не более двух раз одинаковых точек в парах для определения коэффициентов систем достаточно построить четыре системы линейных уравнений с характеристиками (x1y1, x2y2); (x2y2, x3y3), (x3y3, x4y4),(x4y4, x1y1), (1.2; 2.3; 3.4; 4.1). Запишем четыре системы уравнений 1, 2, 3, 4 (рис. 2) для определения коэффициентов аппроксимации для систем 1.2; 2.3; 3.4; 4.1.

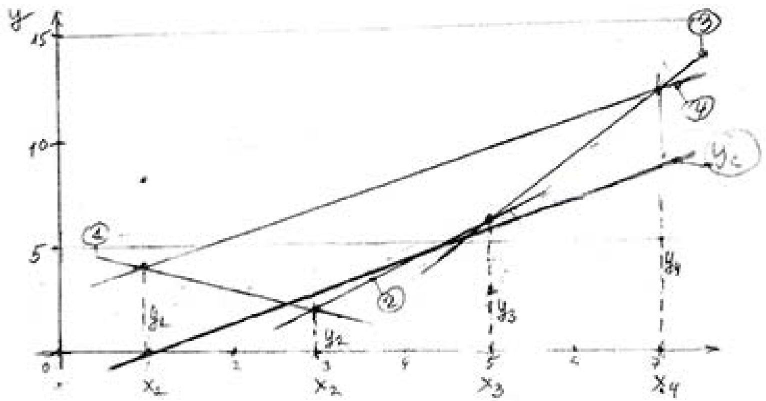

Рис 2

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{01} \\ y_2 = a_{11}x_2 + a_{01} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2 = a_{12}x_2 + a_{02} \\ y_3 = a_{12}x_3 + a_{02} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_3 = a_{13}x_3 + a_{03} \\ y_4 = a_{13}x_4 + a_{03} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_4 = a_{14}x_4 + a_{04} \\ y_1 = a_{14}x_1 + a_{04} \end{cases}$$

где

$$a_{11} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \qquad a_{12} = \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}$$

$$a_{13} = \frac{y_3 - y_4}{x_3 - x_4} \qquad a_{14} = \frac{y_4 - y_1}{x_4 - x_1}$$

$$a_{01} = \frac{y_2x_1 - y_1x_2}{x_1 - x_2} \qquad a_{02} = \frac{y_3x_2 - y_2x_3}{x_2 - x_3}$$

$$a_{03} = \frac{y_4x_3 - y_3x_4}{x_3 - x_4} \qquad a_{04} = \frac{y_1x_4 - y_4x_1}{x_4 - x_1}$$

Среднее значение коэффициентов аппроксимации:

$$a_{1c} = \frac{\sum_1^4 a_{1i}}{4} \qquad a_{0c} = \frac{\sum_1^4 a_{0i}}{4}$$

Аппроксимирующую функцию с усредненными коэффициентами запишем в виде:

$$y_{c4} = a_{1c}x + a_{0c}$$

Определим аппроксимирующие коэффициенты гиперболических функций для трех систем 1, 2, 3.

Составим три группы уравнений для определения коэффициентов аппроксимации для каждой группы (рис. 3).

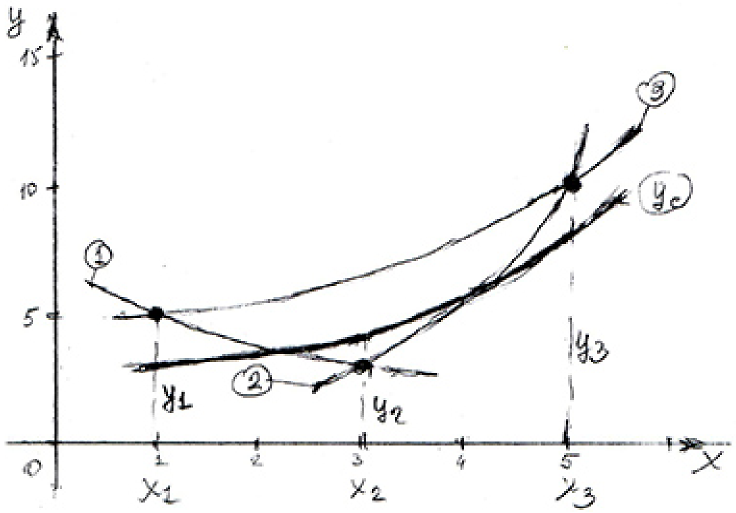

Рис 3

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{a_{01}}{1 - a_{11}x_1} \\ y_2 = \dfrac{a_{01}}{1 - a_{11}x_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2 = \dfrac{a_{02}}{1 - a_{12}x_2} \\ y_3 = \dfrac{a_{02}}{1 - a_{12}x_3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{a_{03}}{1 - a_{13}x_3} \\ y_2 = \dfrac{a_{03}}{1 - a_{13}x_1} \end{cases}$$

где

$$a_{11} = \frac{y_1 - y_2}{y_2\,x_2 - y_1\,x_1}$$

$$a_{12} = \frac{y_2 - y_3}{y_3x_3 - y_2x_2}$$

$$a_{13} = \frac{y_3 - y_1}{y_1x_1 - y_3x_3}$$

$$a_{01} = \frac{y_1y_2(x_2 - x_1)}{y_2x_2 - y_1x_1}$$

$$a_{02} = \frac{y_2y_3(x_3 - x_2)}{y_3x_3 - y_2x_2}$$

$$a_{03} = \frac{y_1y_3(x_1 - x_3)}{y_1x_1 - y_3x_3}$$

Среднее значение коэффициентов

$$a_{1c} = \frac{\sum_1^3 a_{1i}}{3} \qquad a_{0c} = \frac{\sum_1^3 a_{0i}}{3}$$

Аппроксимирующая функция с усредненными коэффициентами

$$y_{c3} = \frac{a_{0c}}{1 - a_{1c}x}$$

При данных о пяти системах (точках) возможно построение 10 аппроксимирующих линейных или гиперболических уравнений. Для определения усредненных коэффициентов линейного или гиперболического уравнений достаточно использования пяти пар точек (x1y1, x2y2); (x2y2, x3y3); (x3y3, x4y4); (x4y4, x5y5), (x5y5, x1y1), характеризующих пять систем, исключая повторное использование данных точек. При решении уравнений определяются пять пар коэффициентов a11a01; a12a02, a13a03; a14a04; a15a05. Суммируя их, получим усредненные коэффициенты

$$a_{1c} = \frac{\sum_1^5 a_{1i}}{5} \qquad a_{0c} = \frac{\sum_1^5 a_{0i}}{5}$$

При увеличении числа систем с гиперболическими функциями аппроксимации увеличивается число систем уравнений аналогично линейной аппроксимации.

На основании приведенных примеров запишем последовательность действий для формирования линейной и гиперболической аппроксимирующих функций, использующих 3 и более систем.

В первую очередь производится построение систем уравнений для определения коэффициентов аппроксимации для каждой пары систем (по двум точкам). Количество систем уравнений соответствует числу систем (точек). Сумма этих коэффициентов аппроксимации делится на число систем - полученные величины являются усредненными коэффициентами аппроксимирующего уравнения для анализируемого числа систем.

Оценим точность линейных и гиперболических аппроксимирующих математических моделей.

Точность аппроксимирующей функции математической модели, учитывая малое число данных, оценим отклонениями решения усредненного аппроксимирующего уравнения от исходных данных и определением их средней величины. Чем меньше средняя величина отклонения, тем точнее аппроксимация математической модели.

Для линейной математической модели точность аппроксимации – средняя величина отклонения решения аппроксимирующего уравнения при использовании данных от трех систем определяется отклонениями

$$y_1 - y_{1c} = \Delta y_1$$

$$y_2 - y_{2c} = \Delta y_2$$

$$y_3 - y_{3c} = \Delta y_3$$

где

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{01} \quad y_2 = a_{12}x_2 + a_{02} \quad y_3 = a_{13}x_3 + a_{03}$$

$$y_{1c} = a_{1c}x_1 + a_{0c} \quad y_{2c} = a_{1c}x_2 + a_{02} \quad y_{3c} = a_{1c}x_3 + a_{0c}$$

Точность оценивается усредненной суммой отклонений

$$\delta = \frac{\sum_1^3 \Delta y_i}{3}$$

Чем меньше величина δ, тем выше точность аппроксимирующей функции.

Усредненную оценку точности аппроксимации линейной математической модели для 4-х систем запишем в виде

$$\delta = \frac{\sum_1^4 \Delta y_i}{4} \text{ где } \quad \Delta y_i = y_i - y_{ic}$$

Для определения точности аппроксимирующей гиперболической функции используется такой же подход, как и для аппроксимирующей линейной функции.

Рассмотрим аппроксимацию и оценки точности ММ второй группы с использованием трех систем с тремя характеристиками. При проведении аппроксимации применяются два вида уравнений: линейные и гиперболические с тремя коэффициентами аппроксимации.

При линейной и гиперболической зависимостях характеристик аппроксимирующая математическая модель может иметь два базовых варианта:

$$y = a_1 x + a_2 z + a_3$$

$$y = a_1 x + \frac{a_2}{1 - a_3 z}$$

Определение коэффициентов аппроксимации у первого базового варианта производим путем последовательного решения двух уравнений

$$y = a_1 x + A \quad \text{и} \quad A = a_2 z + a_3$$

по трем характеристикам от каждой из трех систем

x_1, y_1,z_1; x_2,y_2,z_2; x_3,y_3,z_3.

Для первого уравнения запишем три системы уравнений для определения коэффициента a1 по определенным коэффициентам a11, A1; a12,A2 и a13,A3.

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + A_1 \\ y_2 = a_{11}x_2 + A_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2 = a_{12}x_2 + A_2 \\ y_3 = a_{12}x_3 + A_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_3 = a_{13}x_3 + A_3 \\ y_1 = a_{13}x_1 + A_3 \end{cases}$$

Вычисляем среднее значение коэффициента a1, которое запишем

$$a_{1c} = \frac{\sum_1^3 a_{1i}}{3}$$

Для второго уравнения запишем три системы уравнений для определения коэффициентов a2 и a3

$$\begin{cases} A_1 = a_{21}z_1 + a_{31} \\ A_2 = a_{21}z_2 + a_{31} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_2 = a_{22}z_2 + a_{32} \\ A_3 = a_{22}z_3 + a_{32} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_3 = a_{23}z_3 + a_{33} \\ A_1 = a_{23}z_1 + a_{33} \end{cases}$$

По определенным коэффициентам a21a31; a22a32; a23a33 вычислим средние значения коэффициентов a2c и a3c

$$a_{2c} = \frac{\sum_1^3 a_{2i}}{3}$$

$$a_{3c} = \frac{\sum_1^3 a_{3i}}{3}$$

Аппроксимирующие выражения математической модели запишем

$$y_c = a_{1c}\,x + a_{2c}z + a_{3c}$$

При увеличении числа анализируемых систем на одну систему число систем уравнений увеличивается с 3х - 12, 23, 31 до шести 12, 23, 34, 41, 24, 31, однако, используется только 4 системы уравнений 12, 23, 34, 41, учитывая наличие более двух раз одинаковых характеристик в парах.

Рассмотрим построение аппроксимирующей гиперболической ММ для трех переменных y, x, Z вида

$$y = a_1 x + \frac{a_2}{1 - a_3 z}$$

Эта модель может связывать, например, затраты на создание системы с быстродействием и объемом аппаратуры или отражать функцию, связывающую быстродействие аппаратуры с частотой работы элементов и объемом аппаратуры вычислительного устройства.

Для получения коэффициентов a1, a2, a3 необходимо иметь данные трех систем. Определение коэффициентов будем проводить в два этапа для проведения усреднений.

Первый этап проводится для определения коэффициента аппроксимации. Для этого основное уравнение математической модели представляется в виде:

$$y_i = a_{1j}x_i + A_j$$

$$A_j = \frac{a_{2j}}{1 - a_{3j}z_i}$$

Определение коэффициентов аппроксимации производится по трем системам уравнений:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 a_{11} + A_1 \\ y_2 = x_2 a_{11} + A_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2 = x_2 a_{12} + A_2 \\ y_3 = x_3 a_{12} + A_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_3 = x_3 a_{13} + A_3 \\ y_1 = x_1 a_{13} + A_3 \end{cases}$$

В результате решения трех систем уравнений получим три группы коэффициентов: a11, A1; a12, A2; a13, A3 и определим среднее значение коэффициента аппроксимации переменной «х».

$$a_{1c} = \frac{\sum_1^3 a_{1j}}{3}$$

Для проведения второго этапа математическую модель представим в виде:

$$A_j = \frac{a_{2j}}{1 - a_{3j}z_i}$$

Для определения коэффициентов аппроксимации используем три системы уравнений, в которых применим коэффициенты Aj, определенные на первом этапе

$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{a_{21}}{1 - a_{31}z_1} \\ A_2 = \dfrac{a_{21}}{1 - a_{31}z_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_2 = \dfrac{a_{22}}{1 - a_{32}z_2} \\ A_3 = \dfrac{a_{22}}{1 - a_{32}z_3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_3 = \dfrac{a_{23}}{1 - a_{33}z_3} \\ A_1 = \dfrac{a_{23}}{1 - a_{33}z_1} \end{cases}$$

Решением этих трех систем уравнений будут три группы коэффициентов: a21, a31; a22, a32; a23, a33.

На основании полученных коэффициентов определим их средние величины

$$a_{2c} = \frac{\sum_1^3 a_{2j}}{3}$$

$$a_{3c} = \frac{\sum_1^3 a_{3j}}{3}$$

В результате, подставив средние значения коэффициентов a_{1c}, a_{2c} и a_{3c}, получим аппроксимирующую функцию математической модели с усредненными коэффициентами вида:

$$y_c = a_{1c}x + \frac{a_{2c}}{1 - a_{3c}z}$$

Точность решения аппроксимирующего уравнения оценивается усредненной суммой отклонений характеристик относительно усредненных значений функции:

$$\delta = \frac{\sum_1^3 \Delta y_i}{3}$$

где

$$\Delta y_i = y_i - y_{ic}$$

При увеличении числа систем, используемых для аппроксимации, число систем уравнений увеличивается на одно. Полученные коэффициенты аппроксимации при решении четырех уравнений усредняются, и по ним оценивается точность.

Для ряда математических моделей работы системы используется уравнение 3-х переменных с четырьмя коэффициентами аппроксимации

$$y = x(a_1 - a_2z) + \frac{a_3}{1 - a_4z}$$

При определении коэффициентов аппроксимации необходимы данные четырех близких систем. Определение коэффициентов аппроксимации для их усреднения будем проводить в три этапа.

Уравнение системы для проведения первого этапа представим в виде:

$$y_i = x_i a_{ij} - B_i$$

где

$$B_i = x_i z_i a_{2j} - \frac{a_{3j}}{1 - a_{4j}z_i}$$

Для определения коэффициентов a1j и Bj составим четыре системы уравнений.

$$\begin{cases} y_1 = x_1a_{11} + B_1 \\ y_2 = x_2a_{11} + B_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2 = x_2a_{12} + B_2 \\ y_3 = x_3a_{12} + B_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_3 = x_3a_{13} + B_3 \\ y_4 = x_4a_{13} + B_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_4 = x_4a_{14} + B_4 \\ y_1 = x_1a_{14} + B_4 \end{cases}$$

Решая эти системы уравнений, получим коэффициенты аппроксимации a11, B1; a12, B2; a13, B3; a14, B4. Величину коэффициента a1 после усреднения запишем в виде:

$$a_{1c} = \frac{\sum_1^4 a_{1j}}{4}$$

На втором этапе определим коэффициенты «a_{2j}». Для этого используем уравнение

$$B_i = a_{2j}x_iz_i - A_i$$

Составим четыре системы уравнений для определения коэффициентов a2j и Aj:

$$\begin{cases} B_1 = a_{21}x_1z_1 - A_1 \\ B_2 = a_{21}x_2z_2 - A_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_2 = a_{22}x_2z_2 - A_2 \\ B_3 = a_{22}x_3z_3 - A_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_3 = a_{23}x_3z_3 - A_3 \\ B_4 = a_{23}x_4z_4 - A_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_4 = a_{24}x_4z_4 - A_4 \\ B_1 = a_{24}x_1z_1 - A_4 \end{cases}$$

Усредненный коэффициент a2c определим

$$a_{2c} = \frac{\sum_1^4 a_{2j}}{4}$$

На третьем этапе определяются коэффициенты a3j и a4j и проводится их усреднение. Для этого этапа используется уравнение.

$$A_i = \frac{a_{3j}}{1 - a_{4j}z_i}$$

Составим четыре системы уравнений для определения коэффициентов a_{3j} и a_{4j} и их усредненных величин

$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{a_{31}}{1 - a_{41} z_1} \\ A_2 = \dfrac{a_{31}}{1 - a_{41} z_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_2 = \dfrac{a_{32}}{1 - a_{42} z_2} \\ A_3 = \dfrac{a_{32}}{1 - a_{42} z_3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_3 = \dfrac{a_{33}}{1 - a_{43} z_3} \\ A_4 = \dfrac{a_{33}}{1 - a_{43} z_4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_4 = \dfrac{a_{34}}{1 - a_{44} z_4} \\ A_1 = \dfrac{a_{34}}{1 - a_{44} z_1} \end{cases}$$

Усреднение величин запишем в виде

$$a_{3c} = \frac{\sum_1^4 a_{3j}}{4}$$

$$a_{4c} = \frac{\sum_1^4 a_{4j}}{4}$$

Исходное уравнение, подставив значения коэффициентов, запишем в виде:

$$y_c = x(a_{1c} - a_{2c} z) + \frac{a_{3c}}{1 - a_{4c} z}$$

Точность аппроксимирующей зависимости

$$\delta = \frac{\sum_1^4 \Delta y_i}{4}$$

где

$$\Delta y_i = y_i - y_{ic}$$

Приведенные последовательности формирования аппроксимирующих функций на основе усредненных коэффициентов аппроксимации обеспечивают получение усредненных значений этих функций.

Для получения усредненных коэффициентов аппроксимации основное уравнение разделяют на несколько простых аппроксимирующих уравнений, использующих две координаты для последовательного вычисления усредненного коэффициента каждого уравнения. Число уравнений определяется числом членов основного уравнения.