Вероятностный анализ одного алгоритма упаковки прямоугольников в полосу

Н.Н. Кузюрин, А.И. Поспелов

Анотация. В статье предлагается и теоретически исследуется on-line алгоритм упаковки прямоугольников в полубесконечную полосу. Получено, что для незаполненной площади упаковок, порождаемых алгоритмом в среднем, справедлива оценка $O\left(N^{2/3}(\ln N)^{1/3}\right)$.

1. Введение

В задаче упаковки в полубесконечную полосу (strip packing) цель состоит в упаковке множества прямоугольников в вертикальную полосу единичной ширины так, что стороны прямоугольников должны быть параллельны сторонам полосы (вращения запрещены). При анализе по худшему случаю обычно минимизируют необходимую для упаковки высоту полосы, а при анализе в среднем — математическое ожидание незаполненной площади (от нижней границы прямоугольников в упаковке до верхней) [9, 4].

Таким образом входом задачи является конечный список прямоугольников $L = \{p_j\}_{j=1}^{N}$. Каждый прямоугольник p_j из списка L задан высотой h_j и шириной w_j. Эта задача возникает во многих контекстах и имеет много приложений, в частности, при разработке СБИС, построении оптимальных расписаний для кластеров и т.д. Ее частными случаями являются задача упаковки в контейнеры (bin packing) и задача об m-процессорном расписании Так, если высоты всех прямоугольников из входного списка равны, то получаем задачу об упаковке в контейнеры, где высота заполнения как раз и равна числу контейнеров. Эти задачи интенсивно исследовались ранее. В общей постановке задача об упаковке в полосу также привлекала внимание исследователей с начала 80-х годов [1]. Известно, что эта задача NP-трудна. Интерес, поэтому, представляет построение приближенных алгоритмов с гарантированными оценками точности.

Различные приближенные алгоритмы были предложены для этой задачи [1, 2, 14, 11]. С точки зрения приложений интерес представляют алгоритмы,

работающие в *оперативном режиме*, т.е. размещающие очередной прямоугольник из списка, не используя информацию о последующих прямоугольниках (on-line алгоритмы).

В данной работе исследуется одна простая стратегия упаковки прямоугольников в полосу, в которой прямоугольники размещаются по мере поступления (т.е. в оперативном режиме), но при этом общее число прямоугольников известно заранее. Наш анализ качества алгоритмов в среднем заключается в оценке математического ожидания незаполненной площади после работы конкретного алгоритма (от основания полосы до верхней границы прямоугольников). Очевидно, что чем меньше отношение незаполненной площади к заполненной, тем выше качество упаковки.

Всюду в дальнейшем будем считать, что для каждого прямоугольника высота h_i и ширина w_i имеют равномерное распределение на отрезке $[0,1]$. Будем предполагать, что все случайные величины w_i, h_i — независимы в совокупности. В дальнейшем будем обозначать через Σ математическое ожидание площади, не заполненной прямоугольниками, между основанием полосы и верхней границей самого верхнего прямоугольника. Будем предполагать, что число прямоугольников N — бесконечно большая величина ($N \to \infty$). Отметим, что вероятностному анализу различных эвристик одно и двумерной упаковки посвящено много работ [3, 4, 5, 6, 7, 8].

2. Описание алгоритма

Прежде чем перейти к описанию алгоритма, введём некоторые обозначения. Будем обозначать через $[x]$ — максимальное целое, непревосходящее x. Пусть $\delta > 0$ — некоторый параметр, от которого будет зависеть поведение алгоритма. Будем предполагать, что мы знаем число прямоугольников N, которые надо будет разместить (как избавиться от данного предположения для подобного типа эвристик показано в [10]).

Далее, пусть $n(\delta) = N\delta + \sqrt{N\delta\ln N}$, а $h(\delta) = \frac{1}{2}n(\delta) + c\sqrt{n(\delta)\ln n(\delta)}$, где c — некоторая положительная константа, значение которой мы определим позже.

В основании полосы рассмотрим прямоугольную область высоты $kh(\delta)$ и ширины 1, где $k = [1/(2\delta)]$. Разобъём на прямоугольные области $\{P_i\}_{i=1}^{k}$ высоты $h(\delta)$ и ширины 1. Область P_i, $i = 1,2,\dots,k$ разрежем на две подобласти P'_i и P'_{2k-i+1} высоты $h(\delta)$ и ширины $i\delta$, $1 - i\delta$, соотвественно. Таким образом, мы получим $2k$ областей $\{P'_i\}$ (см. рис. 1).

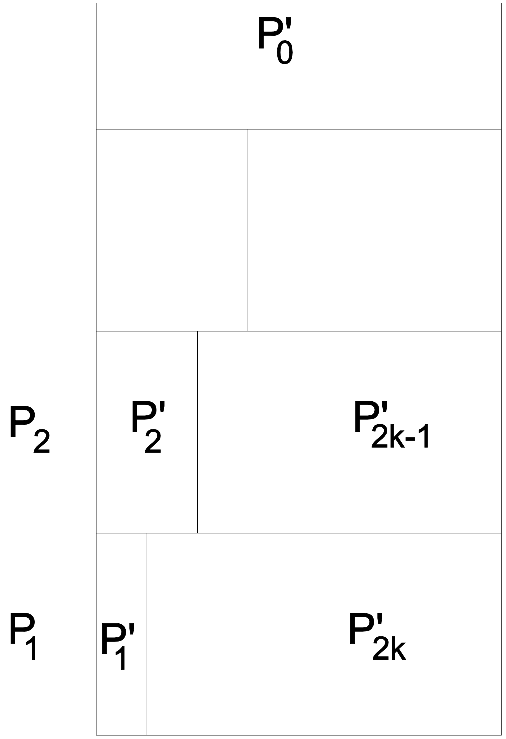

Рис. 1. Разбиение полосы на области.

Опишем теперь сам алгоритм упаковки. Алгоритм выбирает прямоугольники из списка по очереди и сразу же определяет место расположения, при этом прямоугольники упаковываются в одну из областей P'_i или в область P'_0 — часть полосы выше $kh(\delta)$. Упаковка происходит либо на основание области, либо на верхнюю границу упакованных в данную область прямоугольников. Пусть уже упаковано некоторое число прямоугольников и опишем упаковку очередного прямоугольника $p = (w, h) \in L$. Область для упаковки выбирается по следующим правилам.

• Если $w \le 1 - \delta$, то рассматривается область P'_i, имеющая наименьшую ширину, превосходящую w.

- Если суммарная высота прямоугольников, упакованных к текущему моменту в P'_i, не превосходит величины $h(\delta) - h$, то упаковываем p в P'_i.

- Если суммарная высота больше $h(\delta) - h$, то p упаковывается в P'_0.

• если $h > 1 - \delta$, то p упаковывается в P'_0.

Алгоритм заканчивает работу, когда упакован последний прямоугольник из L. Ясно, что при выполнении правил упаковки внутренности упакованных прямоугольников не будут пересекать границы полос и пересекаться между собой. Будем обозначать описанный алгоритм $A1(\delta)$. Для краткости будем говорить, что прямоугольники $p = (w, h)$ является прямоугольником j-го типа (или $p \in T_j$), если $w \le 1 - \delta$ и ширина w больше ширины области P'_{j-1} и меньше ширины области P'_j.

3. Оценка качества алгоритма

Естественным критериями оценки качества упаковки, создаваемой алгоритмами подобного типа, является высота и незаполненная площадь. Зная ширину полосы и общую площадь всех упаковываемых прямоугольников, эти критерием могут быть пересчитаны один в другой. Понятно, что в общем случае описанный алгоритм не даёт оптимального качества упаковки с точки зрения этих критериев. Целью данной статьи является оценка эффективности данного алгоритма в среднем, точнее оценка величины

$$\Sigma = \mathrm{E}\left(H - \sum_{i=1}^{N} h_i w_i\right),$$

где H — общая высота упаковки.

Теорема Пусть $L = \{(h_i, w_i)\}_{i=1}^{N}$ *— набор прямоугольников, причём* h_i *и* w_i *независимы и равномерно распределены на отрезке* $[0,1]$, $\delta \ge c_0 N^{-1/3}$, *где* c_0 *— некоторая положительная константа, тогда для упаковки, получаемой с помощью алгоритма* $A1(\delta)$, *справедливо*

$$\Sigma = O\left(N\delta + \sqrt{\ln N}\sqrt{\frac{N}{\delta}}\right).$$

Ранее в [10] было показано, что для шельфового алгоритма, использующего эвристику First Fit $\Sigma = O(N^{3/4})$, а для шельфового алгоритма, использующего эвристику Best Fit $\Sigma = O(N^{2/3}(\log_2 N)^{1/2})$.

Параметр δ может быть подбираться в зависимости от N. При этом эффективность алгоритма будет меняться. Понятно, что выбирая $\delta = (\ln N)^{1/3} N^{-1/3}$ можно получить для $A1(\delta)$ оценку, несколько улучшающую результаты, полученные в [10]

$$\Sigma = O\left(N^{2/3}(\ln N)^{1/3}\right).$$

Оценки получаемые в теореме предполагают, что число прямоугольников N известно заранее. Однако, как было показано в [10], если упаковывать прямоугольники экспоненциально увеличивающимися по числу группами, алгоритм становиться оперативным и с той же оценкой качества.

Перейдем теперь к доказательству теоремы.

Доказательство теоремы Рассмотрим Σ. В силу свойств суммы и произведения математического ожидания и независимости случайных величин w_i, h_i имеем

$$\Sigma = \mathbb{E}\left(H - \sum_{i=1}^{N} h_i w_i\right) = \mathbb{E}H - \frac{N}{4}. \qquad (1)$$

Оценим $\mathbb{E}H$. В силу используемого алгоритма упаковки высота H складывается из детерминированной величины $kh(\delta)$ и суммы высот прямоугольников, упакованных в область P'_0. Прямоугольники попадают в P'_0 либо если их ширина больше $1-\delta$, либо если не вместились в подходящую для них область P'_i. Оценим эти две составляющих по отдельности.

Математическое ожидание суммарной высоты прямоугольников, имеющих ширину больше $1-\delta$, равна

$$\mathbb{E}\left(\sum_{\{i \le N \mid w_i > 1-\delta\}} h_i\right) = \mathbb{E}\left(\frac{\mathrm{card}\{i \le N \mid w_i > 1-\delta\}}{2}\right) = \frac{N\delta}{2}. \qquad (2)$$

Теперь оценим суммарную высоту остальных прямоугольников, попавших в P'_0. Пусть N_j — число прямоугольников j-го типа (т.е. область P'_j является минимальной, в которую они вмещаются по ширине). Поскольку вероятность попадания в подполосу равна δ, а общее число прямоугольников равно N, имеем

$$\mathbb{E}N_j = N\delta.$$

Пусть T'_j множество прямоугольников j-го типа, размещенных в P'_0. Обозначим через H_j суммарную высоту прямоугольников из T'_j, т.е.

$$H_j = \sum_{p \in T'_j} h_p$$

Так как $T'_j \subseteq T_j$, математическое ожидание H_j может быть оценено следующим образом

$$\mathbb{E}H_j = \mathbb{P}\{T'_j \neq \emptyset\}\mathbb{E}\sum_{p \in T'_j} h \le \mathbb{P}\{T'_j \neq \emptyset\}\mathbb{E}\sum_{p \in T_j} h = \mathbb{P}\{T'_j \neq \emptyset\}N\delta/2. \qquad (3)$$

Для того, чтобы оценить $\mathbb{P}\{T'_j \neq \emptyset\}$ рассмотрим два события. Первое — прямоугольников j-го больше чем $n(\delta)$. Второе — прямоугольников j-го не больше чем $n(\delta)$, но не всех их удалось разместить в P'_j. Понятно, что эти два события не пересекаются, и их объединение содержит событие $T'_j \neq \emptyset$. Таким образом, $\mathbb{P}\{T'_j \neq \emptyset\}$ можно оценить как

$$\mathbb{P}\{T'_j \neq \emptyset\} \le \mathbb{P}\{N_j > n(\delta)\} + \mathbb{P}\{N_j \le n(\delta)\}\mathbb{P}\left\{\sum_{i \in T_j} h_i > h(\delta) \quad N_j \le n(\delta)\right\}. \qquad (4)$$

Для оценки первого из слагаемых в правой части (4) воспользуемся неравенством для вероятностей больших уклонений [12]:

$$\mathbb{P}\{|N_j - EN_j| > \alpha EN_j\} \le 2\exp\{-(\alpha^2/3)EN_j\}$$

или, вычисляя математические ожидания

$$\mathbb{P}\{|N_j - N\delta| > \alpha N\delta\} \le 2\exp\{-(\alpha^2/3)N\delta\}.$$

Выбирая $\alpha = c\sqrt{\frac{\ln N}{N\delta}}$, получаем:

$$\mathbb{P}\{|N_j - N\delta| > c\sqrt{N\delta\ln N}\} \le 2\exp\{-(c^2/3)\ln N\}.$$

Откуда получаем, что

$$\mathbb{P}\{N_j > n(\delta)\} \le 2\exp\left\{-\left(\frac{c^2}{3}\right)\ln N\right\} = 2N^{-\frac{c^2}{3}}. \qquad (5)$$

Для оценки второго слагаемого в правой части (4) воспользуемся оценкой больших уклонений сумм независимых одинаково распределенных случайных величин $S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$, $a_i \le x_i \le b_i$ [13]:

$$\mathbb{P}\{S_n - ES_n \ge nx\} \le \exp\left\{-\frac{2n^2x^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2}\right\}$$

В нашем случае $a_i = 0$, $b_i = 1$ для всех $i = 1, \dots, n$, $\mathbb{E}x_i = \mathbb{E}h_i = 1/2$, $n = n(\delta)$.

Полагая $x = c\sqrt{\ln n(\delta)/n(\delta)}$, получаем:

$$\mathbb{P}\left\{\sum_{i \in T_j} h_i > h(\delta) \quad N_j \le n(\delta)\right\} \le \mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^{n(\delta)} h_i > h(\delta)\right\} \le$$

$$\le \exp\left(-\frac{2n(\delta)^2\ln n(\delta)c^2}{n(\delta)^2}\right) = n(\delta)^{-2c^2}. \qquad (6)$$

Из (3), (4), (5) и (6) получаем, что

$$\mathbb{E}H_j \le N^{1-c^2/3} + n(\delta)^{1-2c^2}. \qquad (7)$$

В силу независимости случайных величин w_i, h_i, математическое ожидание вклада прямоугольников таких, что область P'_j является минимальной, в которую они вмещаются по ширине, не зависит от j. Поэтому из (1), (2) и (7) следует

$$\Sigma \le kh(\delta) + \frac{N\delta}{2} + k\left(N^{1-c^2/3} + n(\delta)^{1-2c^2}\right) - \frac{N}{4}.$$

Учитывая, что $\delta \geq c_0 N^{-1/3}$, и выбирая $c \geq 3/\sqrt{2}$, не сложно получить, что $N^{1-c^2/3} + n(\delta)^{1-2c^2}$ не превосходит некоторой константы c_1. Следовательно

$$\Sigma \leq c_1 + \left(\frac{1}{2}N\delta + \sqrt{N\delta \ln N} + c\sqrt{\left(N\delta + \sqrt{N\delta\ln N}\right)\ln\left(N\delta + \sqrt{N\delta \ln N}\right)}\right)/(2\delta) +$$

$$+\frac{N\delta}{2} - \frac{N}{4} \leq c1\sqrt{N\delta \ln N} + c2\frac{N\delta}{2},$$

что даёт утверждение теоремы.

Литература

[1] B.S. Baker, E.J. Coffman and R.L. Rivest, Orthogonal packings in two dimensions, SIAM J. Computing, (1980) **9**, 846--855.

[2] B.S. Baker, J.S. Schwartz, Shelf algorithms for two dimensional packing problems. SIAM J. Computing, (1983) **12**, 508--525

[3] E.G. Coffman, Jr., C. Courcoubetis, M.R. Garey, D.S. Johnson, P.W. Shor, R.R. Weber, M. Yannakakis, Perfect packing theorems and the average-case bahavior of optimal and online bin packing, SIAM Review, (2002) **44** (1), 95--108.

[4] R.M. Karp, M. Luby, A. Marchetti-Spaccamela, A probabilistic analysis of multidimensional bin packing problems, In: Proc. Annu. ACM Symp. on Theorty of Computing, 1984, pp. 289--298.

[5] P. W. Shor, The average-case analysis of some on-line algorithms for bin packing. Combinatorica (1986) **6**, 179-200.

[6] P. W. Shor, How to pack better than Best Fit: Tight bounds for average-case on-line bin packing, Proc. 32nd Annual Symposium on Foundations of Computer Science, (1991) pp. 752-759.

[7] E. G. Coffman, Jr., D. S. Johnson, P. W. Shor and G. S. Lueker. Probabilistic analysis of packing and related partitioning problems, Statistical Science (1993) **8**, 40-47.

[8] E. G. Coffman, Jr., P. W. Shor. Packings in two dimensions: Asymptotic average-case analysis of algorithms, Algorithmica (1993) **9**, 253-277.

[9] J. Csirik, G.J. Woeginger, Shelf Algorithms for On-Line Strip Packing. Inf. Process. Lett. (1997), **63**(4), 171-175.

[10] Кузюрин Н.Н., Поспелов А.И., Вероятностный анализ шельфовых алгоритмов упаковки прямоугольников в полосу, Дискретная математика, 2006, т. 18, N 1, с. 76--90.

[11] C. Kenyon and E. Remila, A near optimal solution to a two-dimensional cutting stock problem, Mathematics of Operations Research, (2000) **25**, 645--656.

[12] R. Motwani and P. Raghavan, Randomized algorithms, Cambridge Univ. Press, 1995.

[13] W. Hoeffding, Probability inequalities for sums of bounded random variables, J. Amer. Sattist. Assoc., 1963, v. 58, N 301, pp. 13--30.

[14] E.J. Coffman, M.R. Garey, D.S. Johnson and R.E. Tarjan, Performance bounds for level-oriented two-dimensional packing algorithms, SIAM J. Computing, (1980) **9**, 808--826.