Улучшение ранее известной верхней оценки для задачи Multiple Strip Packing и вероятностный анализ алгоритма для большого числа полос[1]

[1] *Д.О. Лазарев <dennis810@mail.ru>*
[1,2] *Н.Н. Кузюрин <nnkuz@ispras.ru>*
[1] *Институт системного программирования им. В.П. Иванникова РАН, 109004, Россия, г. Москва, ул. А. Солженицына, д. 25*
[2] *Московский физико-технический институт, 141700, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., 9*

Аннотация. В работе рассмотрена задача упаковки прямоугольников в полосы единичной ширины Multiple Strip Packing. Рассмотрен аналог ранее предложенного алгоритма, алгоритм упаковки в области ограниченной высоты Limited Hash Packing и произведён его вероятностный анализ. Алгоритм онлайновый и работает в режиме closed-end, когда число прямоугольников, которые нужно упаковать известно алгоритму до начала работы. Лучшая из ранее известных оценок для математического ожидания площади полос, не заполненной прямоугольниками для задачи Multiple Strip Packing при числе полос $k \leq \sqrt{N}$, составляющая $E(S_{sp}) = O(\sqrt{N}\ln N)$ была улучшена до $E(S_{sp}) = O(\sqrt{N\ln N})$. Также был произведён анализ алгоритма в случае $k = \omega(\sqrt{N})$. Было доказано, что при любых k, N выполнено $E(S_{sp}) \geq \frac{k}{8} - \frac{\sqrt{N}}{4}$.

Ключевые слова: Strip Packing; Multiple Strip Packing; онлайновый алгоритм; режим closed-end; вероятностный анализ; алгоритм упаковки прямоугольников в ограниченные области; Limited Hash Packing.

DOI: 10.15514/ISPRAS-2019-31(1)-9

Для цитирования: Лазарев Д.О., Кузюрин Н.Н. Улучшение ранее известной верхней оценки для задачи Multiple Strip Packing и вероятностный анализ алгоритма для большого числа полос. Труды ИСП РАН, том 31, вып. 1, 2019 г., стр. 133-142. DOI: 10.15514/ISPRAS-2019-31(1)-9

1. Введение

Задача упаковки прямоугольников в полосу Strip Packing Problem и её обобщение – задача упаковки прямоугольников в несколько полос одинаковой ширины Multiple Strip Packing Problem(MSP) активно изучаются в последнее время благодаря их многочисленным практическим применениям.

При решении задачи построения расписания выполнения параллельных вычислительных задач на кластере или группе кластеров, согласно [1], можно представить каждую из задач в виде прямоугольника, высоте которого соответствует время выполнения задачи на кластере, а ширине соответствует число процессоров, необходимое для решения задачи на кластере. Таким образом, при наличии одного кластера задача построения расписания выполнения задач сводится к задаче Strip Packing, при наличии нескольких кластеров [2] задача построения расписаний для параллельных заданий сводится либо к задаче Multiple Strip Packing, либо к её обобщениям[3].

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 17-07-01006

Также интерес к задаче Strip Packing подкреплён практическими применениями задачи и её частных случаев в таких перспективных областях, как задачи раскроя и перевозки материалов, грид-технологии[4], [5], облачные вычисления [6] и распределение памяти [7].

2. Постановка задачи Multiple Strip Packing и известные результаты

Задача Strip Packing является геометрическим обобщением классической задачи Bin Packing или задачи упаковки в контейнеры. Задача Bin Packing - одна из первых известных NP-полных в сильном смыле задач [8]. Для неё было составлено множество приближённых алгоритмов для анализа в худшем случае [9], [10] и в среднем [11], [12].

При анализе задачи в среднем сначала рассматривались шельфовые алгоритмы, разбивающие полосу на слои(шельфы) и распределяющие по шельфам прямоугольники в зависимости от их высоты и внутри шельфа пакующие прямоугольники некой эвристикой для задачи Bin Packing. Однако в [13] Коффманом и Шором было показано, что для любого шельфового алгоритма математическое ожидание не заполненной прямоугольниками площади полосы $E(S_{sp}) = \Omega\left(N^{\frac{2}{3}}\right)$.

В работе [13] был предложен closed-end алгоритм с точностью $O\left(N^{\frac{2}{3}}\right)$, а 2011 году в [14] Кузюриным и Поспеловым был предложен open-end алгоритм с точностью $\theta\left(N^{\frac{2}{3}}\right)$. В работе [15] Трушниковым был предложен новый closed-end алгоритм, точность которого была исследована в работе [16], где было показано, что $E(S_{sp}) = O(N^{\frac{1}{2}}\log^{\frac{3}{2}} N)$. В [17] оценка была улучшена до $E(S_{sp}) = O\left(N^{\frac{1}{2}}\ln\ N\right)$ и обобщен3

а на случай задачи Multiple Strip Packing с числом полос $k \leq \sqrt{N}$. В настоящей работе показано, что

$$E(S_{sp}) = O(\sqrt{N\ln N}) \text{ при числе полос } k \leq \sqrt{N} \qquad (1)$$

Значительное уменьшение величины $E(S_{sp})$ в алгоритме из [15] по сравнению с ранее известными алгоритмами обусловлено ограничением общей высоты разбиения на области и усовершенствованным способом упаковки прямоугольники в области.

Постановка задачи Multiple Strip Packing:

В набор из k полубесконечных прямоугольных полос $C_1, .., C_k$ единичной ширины требуется упаковать без пересечений и без вращений открытые прямоугольники $a_1, \dots, a_N$ со сторонами, параллельными основаниям или сторонам полос, длины сторон прямоугольников не превосходят 1. Требуется минимизировать высоту упаковки H, или наибольшую высоту верхней стороны замыканий одного из прямоугольников.

Будем рассматривать онлайновые алгоритмы упаковки, не знающие длин сторон прямоугольников $a_{i+1}, \dots, a_N$ при размещении i-го прямоугольника a_i.

Алгоритм работает в режиме closed-end, т.е. ему известно число N прямоугольников, которые нужно упаковать до начала работы.

Производим вероятностный анализ алгоритма, т.е. считаем, что длины сторон прямоугольников – независимые случайные величины, имеющие равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. Ошибку алгоритма оцениваем через математическое ожидание $E(S_{sp})$, где S_{sp} – площадь незаполненной прямоугольниками части полос от нижнего основания полос до наибольшей высоты верхней стороны H. Верно, что

$$E(S_{sp}) = kE(H) - E(S_r) = kE(H) - \frac{N}{4}$$

где S_r- суммарная площадь всех прямоугольников, а k- число полос.

При наличии всего одной полосы $k = 1$ задача Multiple Strip Packing вырождается в задачу Strip Packing.

3. Алгоритм упаковки в области ограниченной высоты (Limited Hash Packing)

1. Разбиение на области. Выберем $\boldsymbol{s} = \left\lceil \frac{\sqrt{\boldsymbol{N}}}{\boldsymbol{k}} \right\rceil$. Верно, что

$$s \in \begin{cases} \left[\frac{\sqrt{N}}{k}, 2\frac{\sqrt{N}}{k}\right], k \le \sqrt{N} \\ 1, k > \sqrt{N} \end{cases}$$

Разобьём нижнюю часть всех полос высотой $\frac{N}{4k}$ на $2sk - 1$ области с высотами, равными $\frac{N}{4sk}$, и значениями ширины областей, равными $\forall j = \overline{1, 2sk - 1}$, как показано на рис. 1.

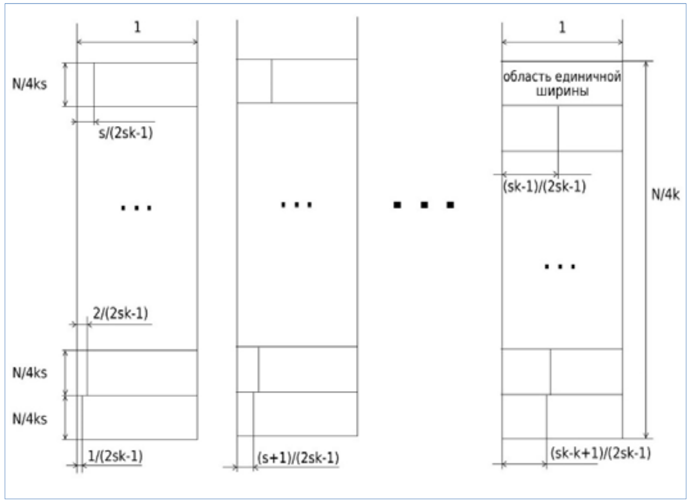

Рис. 1. Разбиение нижней части полос на прямоугольные области
Fig. 1. Breaking the bottom of the strips into rectangular areas

Пронумеруем области: область имеет номер $i(i = \overline{1, 2sk - 1})$, если её ширина равна $\frac{i}{2sk-1}$. Так, самая тонкая область имеет номер один, а самая толстая, единичной ширины, имеет номер $2sk - 1$.

2. Упаковка прямоугольников. Скажем, что прямоугольник R имеет тип $j, j = \overline{1, 2sk - 1}$, если его ширина $w(R) \in \left(\frac{i-1}{2sk-1}, \frac{i}{2sk-1}\right]$. Минимальная область, в которую прямоугольник типа i вмещается, есть область с номером i.

Алгоритм упаковки в области ограниченной **высоты (Limited Hash Packing):**

1) Если выпал прямоугольник R типа i, и он помещается в область с номером i, то размещаем R в эту область на верх текущей упаковки в данной области.
2) Если прямоугольник R типа i не помещается в область с номером i, то размещаем его на верх текущей упаковки в область с минимальным номером, куда его можно поместить, если это возможно.

3) Иначе, если R не помещается ни в одну область (такие прямоугольники назовём **выпавшими**), то помещаем его на верх текущей упаковки в полосу (т.е. нижняя сторона R помещается не ниже части полос, разбитой на области, и лежит на самой нижней (по всем полосам) верхней стороне самого высокого прямоугольника в полосе, помещённого, также как и R, выше всех областей, если такой прямоугольник есть, и на верх самой высокой области в одной из полос, если ту полосу ещё не упаковано выпавших прямоугольников), заполненную не выше всех других полос. Для прямоугольника в полосе выбираем такое положение, чтобы его левая сторона касалась левого края полосы.

4. Верхняя оценка математического ожидания площади незаполненной части полос $E(S_{sp})$

Следующая Лемма была доказана в случае $\alpha \le 1$ в работе [16].

Лемма 1. Пусть случайная величина $X = X_1 + X_2 + \dots + X_k$, где $X_i = \xi_i \eta_i$, ξ_i принимает значение 1 с вероятностью p и 0 с вероятностью $1 - p$,- η_i — равномерно распределенная на отрезке $(0, 1]$ случайная величина, причем все случайные величины $\xi_i, \eta_i, i = \overline{1, \dots, k}$ независимы в совокупности. Тогда для любого α из интервала $(0, 1]$ выполняется неравенство:

$$\mathbb{P}\{X > (1 + \alpha)EX\} \le e^{-\frac{5}{9}\alpha^2 EX}$$

При $\alpha > 1$ верно, что

$$\mathbb{P}\{X > (1 + \alpha)EX\} \le e^{-\frac{1}{3}\alpha EX}$$

Доказательство.

Докажем утверждение в случае $\alpha > 1$. В работе [16] было показано, что для любых $\alpha, t \ge 0$

$$\mathbb{P}\{X > (1 + \alpha)EX\} \le \exp\left\{\left(2\frac{e^t - 1}{t} - 2 - t(1 + \alpha)\right)\frac{pk}{2}\right\}$$

В данную формулу подставим $t = 1$, учитывая, что $\alpha > 1$, Получим:

$$\mathbb{P}\{X > (1 + \alpha)EX\} \le \exp\left\{\frac{pk}{2}(2e - 5 - \alpha)\right\} \le \exp\left\{\frac{pk}{2}\left(-\frac{\alpha}{3}\right)\right\} = e^{-\frac{1}{3}\alpha EX} \blacksquare$$

Теорема 1 (Оценки $\boldsymbol{E_{sp}}$ для алгоритма Limited Hash Packing) Для алгоритма Limited Hash Packing при упаковке N прямоугольников в k полос,

$$E(S_{sp}) \le 3k + 6\sqrt{N \ln N} = O(\max\{k, \sqrt{N \ln N}\})$$

Обозначения.

H- высота упаковки прямоугольников в полосы.

$h_{max} = H - \frac{N}{4k}$ – максимальная суммарная высота выпавших(т.е. упакованных не в области, а выше областей) прямоугольников, упакованных в одну полосу.

h_{min} – минимальная суммарная высота выпавших прямоугольников, упакованных в одну полосу.

h – суммарная высота всех выпавших прямоугольников.

l_i – суммарная высота прямоугольников типов $2sk - 1, \dots, 2sk - i$.

Прямоугольник R имеет тип $j, j = \overline{1, 2sk - 1}$, если его ширина $w(R) \in \left(\frac{i-1}{2sk-1}, \frac{i}{2sk-1}\right]$.

Область имеет номер $i(i = \overline{1, 2sk - 1})$, если её ширина равна $\frac{i}{2sk-1}$.

Область с номером j- **не переполнялась**, если и только если любой прямоугольник типа $k \in \{1, 2, \dots, j\}$ был упакован в область с номером $m \in \{k, k + 1, \dots, j\}$.

Доказательство. Так как суммарная площадь областей равна $\frac{N}{4}$, то по формуле 1 для доказательства достаточно показать, что

$$kE(H) - \frac{N}{4} = E(h_{max})k \le 3k + 6\sqrt{N\ln N} \qquad (2)$$

Так как по построению $h_{min} + 1 \ge h_{max}$, а $h \ge kh_{min}$, то

$$h_{max} \le \frac{h}{k} + 1 \qquad (3)$$

Оказывается, что верна оценка

$$h \le \max_i \left\{l_i - \frac{iN}{4sk} + i\right\} \qquad (4)$$

Действительно, скажем, что область с номером j- не переполнялась, если и только если любой прямоугольник типа $p \in \{1, 2, \dots, j\}$ был упакован в область с номером $m \in \{p, p + 1, \dots, j\}$. Если в область упаковали прямоугольники суммарной высотой не более, чем $\frac{N}{4sk} - 1$, что ровно на единицу меньше, чем высота области, то область не переполнена(хотя обратное – не верно).

Рассмотрим $j_0 =$ наибольшее j: область с номером $j -$ не переполнялась. Если такой области нет, то полагаем $j = 0$. Тогда, во-первых, ни в областях с номерами $k \in \{j_0 + 1, j_0 + 2, \dots, 2sk - 1\}$, ни среди выпавших прямоугольников нет прямоугольников типа $j' \le j_0$. И, во-вторых, любая из областей с номером $j'' > j_0$ заполнена не менее, чем на $\frac{N}{4sk} - 1$, иначе, $j'' = j_0$. Таким образом, верно, что $h \le l_{2ks-j_0-1} - \left(2ks - j_0 - \frac{1N}{4sk}\right) + 2ks - j_0 - 1$, стало быть, верна формула 4.

Из формул 3 и 4 получаем, что $kh_{max} \le h + k \le \max_i\left\{l_i - \frac{iN}{4sk} + i\right\} + k$. По формуле 2 с учётом того, что $i \le max\{2k, 2\sqrt{N}\} < 2k + 2\sqrt{N}$ и того, что,

$$E(h_{max})k \le E\left(\max_i\left\{l_i - \frac{iN}{4sk} + i\right\}\right) + k \le 3k + 6\sqrt{N\ln N} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E\left(\max_i\{l_i + i\}\right) \le 2k + 6\sqrt{N\ln N} + \frac{iN}{4sk}$$

достаточно доказать, что верна формула 5:

$$E\left(\max_i\left\{l_i - \frac{iN}{4sk}\right\}\right) \le 4\sqrt{N\ln N} \qquad (5)$$

Докажем, что при достаточно больших N

$$\mathbb{P}\left(l_i \le \frac{Ni}{4sk} + 3\sqrt{N\ln N}\ \ \forall i = \overline{1{,}2sk-1}\right) \ge 1 - N^{-2} \qquad (6)$$

Заметим, что $E(l_i) = \frac{Ni}{4sk}$. Значит, по лемме 1,

$$\mathbb{P}\left(l_i \ge \frac{Ni}{4sk} + 3\sqrt{N\ln N}\right) = \mathbb{P}\left(l_i \ge E(l_i) + 3\sqrt{N\ln N}\right) = P\left(L_i \ge (1+\alpha)E(l_i)\right),$$

$$\alpha = 3\sqrt{N\ln N}\frac{4ks}{Ni} = \frac{12ks\sqrt{\ln N}}{i\sqrt{N}}$$

Рассмотрим 2 случая:

1) $\alpha \le 1$. По лемме 1), учитывая, что $i \le 2ks - 1 < 2ks$ имеем:

$$\mathbb{P}\left(l_i \ge \frac{Ni}{4sk} + 3\sqrt{N\ln N}\right) = \mathbb{P}\left(l_i \ge \left(1 + \frac{12ks\sqrt{\ln N}}{i\sqrt{N}}\right)E(l_i)\right) \le$$

$$\le \exp\left\{-\frac{\frac{5}{9}144k^2s^2\ln N}{Ni^2}\frac{Ni}{4ks}\right\} = \exp\left\{-\frac{20ks\ln N}{i}\right\} < \exp\left\{-\frac{20ks\ln N}{2ks}\right\} =$$

$$= N^{-10} < N^{-3}$$

2) $\alpha > 1$. $E(l_i)\alpha = 3\sqrt{N\ln N}$. Значит, по Лемме 1, для достаточно больших N имеем:

$$\mathbb{P}\left(l_i \ge \frac{Ni}{4sk} + 3\sqrt{N\ln N}\right) \le \exp\left\{-\frac{E(l_i)\alpha}{3}\right\} = \exp\{-\sqrt{N\ln N}\} \le N^{-3}$$

Так как $i \le N$, получаем формулу 6:

$$\mathbb{P}\left(l_i \ge \frac{Ni}{4sk} + 3\sqrt{N\ln N}\right) \le N^{-3} \Rightarrow$$

$$\mathbb{P}\left(l_i \le \frac{Ni}{4sk} + 3\sqrt{N\ln N}\ \ \forall i = \overline{1{,}2sk-1}\right) \ge 1 - N^{-2}$$

Значит, так как в любом случае $l_i \le N$, для достаточно больших N имеем:

$$E\left(\max_i\{l_i\} - \frac{iN}{4ks}\right) \le 3\sqrt{N\ln N} + \mathbb{P}\left(l_i \ge \frac{Ni}{4sk} + 3\sqrt{N\ln N}\ \ \forall i = \overline{1{,}2sk-1}\right)N \le$$

$$\le 4\sqrt{N\ln N}$$

Отсюда следует формула 5, из которой, в свою очередь, следует утверждение теоремы. ■

5. Нижние оценки $E(S_{sp})$ для алгоритма Limited Hash Packing при упаковке в $k = \Omega(\sqrt{N})$ полос

Теорема 2. Покажем, что после выпадения N прямоугольников,

$$E(S_{sp}) \ge \frac{k}{8} - \frac{\sqrt{N}}{4}$$

Обозначения.

$X = X_1 + \dots + X_N$- сумма высот всех прямоугольников, где X_i-имеет равномерное на [0, 1] распределение.

H – высота упаковки алгоритмом Limited Hash Packing.

Прямоугольник назовём **выпавшим**, если он помещён алгоритмом выше части полос, разбитой на области.

Доказательство.

Покажем, что с вероятностью $P \ge \frac{1}{4}$ один из выпавших прямоугольников имеет высоту $\ge \frac{1}{2}$ и сумма высот всех прямоугольников $X \ge \frac{N}{2}$. Покажем, что отсюда будет следовать утверждение теоремы.

Ввиду симметричности распределения X относительно математического ожидания $E(X) = \frac{N}{2}$, верно, что $\frac{N}{2} - E\left(X \middle| X \le \frac{N}{2}\right) = E(|X - EX|) \le \sqrt{Var(X)} < \frac{\sqrt{N}}{2}$.

Таким образом, обозначив за $E(X|A)$ математическое ожидание X при условии того, что случайное событие A произошло и учитывая, что, если $X > \frac{N}{2}$, то хотя бы 1 прямоугольник выпал, и, следовательно, так как высота упаковки H не менее, чем $\frac{N}{4k}$, $E(H)k - \frac{N}{4} > 0$, по формуле полной вероятности, имеем:

$$E(S_{sp}) = E(H)k - \frac{N}{4} = \mathbb{P}\left(X \le \frac{N}{2}\right)\left(kE\left(H \middle| X \le \frac{N}{2}\right) - \frac{N}{4}\right) +$$

$$+\mathbb{P}\left(\left(X > \frac{N}{2}\right) \cap \left(H < \frac{N}{4k} + \frac{1}{2}\right)\right)\left(kE\left(H \middle| \left(X > \frac{N}{2}\right) \cap \left(H < \frac{N}{4k} + \frac{1}{2}\right)\right) - \frac{N}{4}\right) +$$

$$+\mathbb{P}\left(\left(X > \frac{N}{2}\right) \cap \left(H \ge \frac{N}{4k} + \frac{1}{2}\right)\right)\left(kE\left(H \middle| \left(X > \frac{N}{2}\right) \cap \left(H \ge \frac{N}{4k} + \frac{1}{2}\right)\right) - \frac{N}{4}\right) \ge$$

$$-\frac{1}{4}\sqrt{N} + 0 + \frac{1}{4}\frac{k}{2} = -\frac{\sqrt{N}}{4} + \frac{k}{8}$$

при $\mathbb{P}\left(\left(X \ge \frac{N}{2}\right) \cap \left(H \ge \frac{N}{4k} + \frac{1}{2}\right)\right) \ge \frac{1}{4}$

Докажем, что с вероятностью $P \geq \frac{1}{4}$ верно, что $\left(X \geq \frac{N}{2}\right)$и$\left(H \geq \frac{N}{4k} + \frac{1}{2}\right)$, и тем самым докажем теорему.

Рассмотрим 2 типа случайных событий в предположении, что $X \geq \frac{N}{2}$:

1) $A(i)$- первый выпавший прямоугольник имел номер $i, 1 \leq i \leq N$ и его высота была больше $\frac{1}{2}$;
2) $B(i)$- первый выпавший прямоугольник имел номер $i, 1 \leq i \leq N$ и его высота была не больше $\frac{1}{2}$.

Верно, что $\mathbb{P}(A(i)) \geq \mathbb{P}(B(i))$, так как если мы рассмотрим набор длин сторон прямоугольников $h_1, w_1, \dots, h_N, w_N$, такой, что событие $B(i)$ имеет место, то для набора сторон $h_1, w_1, \dots, h_i + \frac{1}{2}, w_i, \dots, h_N, w_N$ имеет место событие $A(i)$. Действительно, если при упаковке прямоугольников алгоритмом Limited Hash Packing i-ый прямоугольник- первый вылевший и его высота $h_i < \frac{1}{2}$, то при тех же параметрах остальных прямоугольников $h_i \geq \frac{1}{2}$, то прямоугольник с номером i- также первый вылетевший.

Верно, что $A(i) \cap A(j) = B(i) \cap B(j) = \emptyset, i \neq j$ и $A(i) \cap B(j) = \emptyset$ и

$$\bigcup_{i=1}^{N} A(i) \in \left(X \geq \frac{N}{2}\right) \cap \left(H \geq \frac{N}{4k} + \frac{1}{2}\right) \text{ и}$$

$$\left(X \geq \frac{N}{2}\right) \cap \left(H < \frac{N}{4k} + \frac{1}{2}\right) \in \bigcup_{i=1}^{N} B(i)$$

Следовательно, $\mathbb{P}\left(\left(X \geq \frac{N}{2}\right) \cap \left(H \geq \frac{N}{4k} + \frac{1}{2}\right)\right) \geq \mathbb{P}\left(\left(X \geq \frac{N}{2}\right) \cap \left(H < \frac{N}{4k} + \frac{1}{2}\right)\right)$. Так как сумма последних двух вероятностей равна $\frac{1}{2}$, верно, что $\mathbb{P}\left(\left(X \geq \frac{N}{2}\right) \cap \left(H \geq \frac{N}{4k} + \frac{1}{2}\right)\right) \geq \frac{1}{4}$, откуда и следует утверждение теоремы. ■

6. Заключение

Для задачи упаковки прямоугольников в полосы одинаковой ширины Multiple Strip Packing и её частного случая – задачи упаковки прямоугольников в полосу единичной ширины Strip Packing был произведён вероятностный анализ алгоритма упаковки в области ограниченной высоты Limited Hash Packing. Данный алгоритм является обобщением на случай упаковки в несколько полос алгоритма, предложенного Трушниковым в [15]. Алгоритм онлайновый, работает в режиме closed-end, т.е. ему известно число прямоугольников N, которое требуется разместить до начала работы.

Во многих алгоритмах для задач Strip Packing и Multiple Strip Packing прямоугольники разбиваются на группы по ширине, прямоугольники из одной группы упаковываются по высоте в области одного типа. Принципиальным отличием алгоритма, рассматриваемого в настоящей работе и алгоритмов того же типа, который мы называем алгоритмами упаковки в области ограниченной высоты, является тот факт, что после переполнения одной из областей, новая область не создаётся, а прямоугольник кладётся в самую узкую область, куда он помещается, если таковая существует.

В этой работе лучшая из ранее известных для задачи Multiple Strip Packing при числе полос $k \leq \sqrt{N}$, составляющая $E(S_{sp}) = O(\sqrt{N} \ln N)$ была улучшена до $E(S_{sp}) = O\left(\sqrt{N \ln N}\right)$. Также был произведён анализ алгоритма в случае $k = \Omega(\sqrt{N})$. Было доказано, что при любых k, N выполнено $E(S_{sp}) \geq \frac{k}{8} - \frac{\sqrt{N}}{4}$.

Список литературы

[1]. Кузюрин Н., Грушин Д., Фомин С. Проблемы двумерной упаковки и задачи оптимизации в распределенных вычислительных системах. Труды ИСП РАН, том 26, вып. 1, 2014 г., стр. 483–502, DOI: 10.15514/ISPRAS-2014-26(1)-21.

[2]. С.Н. Жук. О построении расписаний выполнения параллельных задач на группах кластеров с различной производительностью. Труды ИСП РАН, том 23, 2012, стр. 447-454, DOI: 10.15514/ISPRAS-2012-23-27.

[3]. S.N. Zhuk. Approximate algorithms for packing rectangles into several strips. Discrete Mathematics and Applications, vol 18, issue 1, 2006, pp. 91-105.

[4]. Tchernykh A., Schwiegelshohn U., Yahyapour R., Kuzjurin N. On-line hierarchical job scheduling on grids with admissible allocation. Journal of Scheduling, vol. 13, issue 5, 2010, pp. 545-552.

[5]. Tshernykh A., Ramirez J.M., Avetisyan A., Kuzjurin N., Grushin D., Zhuk S. Two-Level Job-Scheduling strategies for a Computational Grid. Lecture Notes in Computer Science, vol. 3911, 2005, pp. 774-781.

[6]. Cohil B., Shah S., Goleshha Y., Patel D. A Comparative Analysis of Virtual Machine Placement Techniques in the Cloud Environment. International Journal of Computer Applications, vol. 156, no. 14, 2016, pp. 12-18.

[7]. Garey M.R. Graham R.L., Ullman J.D., Worst-case analysis of memory allocation algorithms. In Proc. of the fourths annual ACM symposium on theory of computing (STOC ’72), 1972, pp. 143-150.

[8]. Garey M.R., Johnson D.S. Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completeness. Freeman, San Francisco, 1979, 338 p.

[9]. Johnson D.S. Near-optimal Bin Packing Algorithms. PhD Thesis, Massachusetts Institute of Technology, Department of Mathematics, Cambridge, 1973, 401 p.

[10]. Vliet A. An improved lower bound for on-line bin packing algorithms. Journal of information Processing Letters, vol. 43, issue 5, 1992, pp. 277-284.

[11]. Coffman E.G., Courcoubetis C., Garey M.R., Johnson D.S., McGeoch L.A., Shor P.W., Weber R. and Yannakakis M. Fundamental discrepancies between average-case analysis under discrete and continuous distributions: a bin packing study. In Proc. of the twenty-third annual ACM symposium on Theory of Computing (STOC '91), 1991, pp. 230-240.

[12]. Shor P.W. How to pack better than Best Fit: tight bounds for average-case online Bin Packing. In Proc. of the 32nd Annual Symposium of foundations of Computer Science, 1991, pp. 752-759.

[13]. Coffman E.G., Shor P.W. Packing in two dimensions: Asymptotic average-case analysis of algorithms. Algorithmica, vol. 9, issue 3, 1993, pp. 253-277.

[14]. Кузюрин Н.Н., Поспелов А.И. Вероятностный анализ нового класса алгоритмов упаковки прямоугольников в полосу. Журнал вычислительной математики и математической физики, том 51, no. 10, 2011, стр. 1931-1936.

[15]. Трушников М.А. Об одной задаче Коффмана-Шора, связанной с упаковкой прямоугольников в полосу. Труды ИСП РАН, том 22, 2012 г., стр. 456-462, doi: 10.15514/ISPRAS-2012-22-24.

[16]. Трушников М.А. Вероятностный анализ нового алгоритма упаковки прямоугольников в полосу. Труды ИСП РАН, том 24, 2013 г., стр. 457-468, doi: 10.15514/ISPRAS-2013-24-21/

[17]. Лазарев Д.О., Кузюрин Н.Н. Алгоритм упаковки прямоугольников в несколько полос и анализ его точности в среднем. Труды ИСП РАН, том 29, выпуск 6, 2017 г., стр. 221-228, doi:: 10.15514/ISPRAS-2017-29(6)-13

An improvement of previously known upper bound of Multiple Strip Packing problem and probabilistic analysis of algorithm in case of large number of strips given

[1] *D.O. Lazarev <dennis810@mail.ru>*
[1,2] *N.N. Kuzyurin <nnkuz@ispras.ru>*
[1] *Institute for System Programming of the Russian Academy of Sciences, 25, Alexander Solzhenitsyn st., Moscow, 109004, Russia.*
[2] *Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudnyj, Institutskij alley, Moscow region, 141700, Russia*

Abstract. In this article, an analog of previously proposed algorithm Limited Hash Packing for Multiple Strip Packing Problem is studied using probabilistic analysis. Limited Hash Packing is an on-line algorithm, which works in closed-end mode, knowing the number $\boldsymbol{N}$ of rectangles it has to pack before knowing the heights and width of the first rectangle. The algorithm proposes that width and heights of all rectangles have a uniform on $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ distribution and works in two stages. Firstly, it divides the k strips into $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{\Theta}(\mathbf{max}\{\boldsymbol{k}, \sqrt{\boldsymbol{N}}\})$ rectangular areas width of which equal $\frac{\boldsymbol{i}}{\boldsymbol{d}}, \forall \boldsymbol{i} = \overline{\mathbf{1}, \ldots, \boldsymbol{d}}$ such that the sum space of all this areas equals the expected space of all rectangles, $\frac{\boldsymbol{N}}{\mathbf{4}}$. Secondly, it packs a rectangle area of minimal width, in which it fits, or, if rectangle doesn't fit in any area, above all areas. It was shown, that for any number of strips $\boldsymbol{k}$ and any number of rectangles $\boldsymbol{N}$, the expected value of space not filled with rectangles of all strips from their lowest point to the highest point of the highest rectangle, $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{sp}}) \leq \mathbf{6}\sqrt{\boldsymbol{N}\ln\boldsymbol{N}} + \mathbf{3}\boldsymbol{k}$. It was also shown, that $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{sp}}) \geq \frac{\boldsymbol{k}}{\mathbf{8}} - \frac{\sqrt{\boldsymbol{N}}}{\mathbf{4}}$**.** This result proves that the previous bound is asymptotically tight in case when packing $\boldsymbol{N}$ rectangles into $\boldsymbol{k} \geq \sqrt{\boldsymbol{N}\ln\boldsymbol{N}}$ strips.

Keywords: on-line algorithm; closed-end; probabilistic analysis; closed-end mode; Multiple Strip Packing; an algorithm for packing into limited areas Limited Hash Packing.

DOI: 10.15514/ISPRAS-2019-31(1)-9

For citation: Lazarev D.O., Kuzyurin N.N. An improvement of previously known upper bound of Multiple Strip Packing problem and probabilistic analysis of algorithm in case of large number of strips given. Trudy ISP RAN/Proc. ISP RAS, vol. 31, issue 1, 2019. pp. 133-142 (in Russian). DOI: 10.15514/ISPRAS-2019-31(1)-9

References

[1]. Two-dimensional packing problems and optimization in distributed computing systems N.N. Kuzyurin, D.A. Grushin, S.A. Fomin, Trudy ISP RAS/Proc. ISP RAS, vol. 26, issue 1, 2015, pp. 483–502(in Russian). DOI: 10.15514/ISPRAS-2014-26(1)-21

[2]. Zhuk S.N. On-line algorithm for scheduling parallel tasks on a group of related clusters. Trudy ISP RAN/Proc. ISP RAS, vol. 23, 2012, pp. 447-454 (in Russian). DOI: 10.15514/ISPRAS-2012-23-27

[3]. S.N. Zhuk. Approximate algorithms for packing rectangles into several strips. Discrete Mathematics and Applications, vol 18, issue 1, 2006, pp. 91-105.

[4]. Tchernykh A., Schwiegelshohn U., Yahyapour R., Kuzjurin N. On-line hierarchical job scheduling on grids with admissible allocation. Journal of Scheduling, vol. 13, issue 5, 2010, pp. 545-552.

[5]. Tshernykh A., Ramirez J.M., Avetisyan A., Kuzjurin N., Grushin D., Zhuk S. Two-Level Job-Scheduling strategies for a Computational Grid. Lecture Notes in Computer Science, vol. 3911, 2005, pp. 774-781.

[6]. Cohil B., Shah S., Goleshha Y., Patel D. A Comparative Analysis of Virtual Machine Placement Techniques in the Cloud Environment. International Journal of Computer Applications, vol. 156, no. 14, 2016, pp. 12-18.

[7]. Garey M.R. Graham R.L., Ullman J.D., Worst-case analysis of memory allocation algorithms. In Proc. of the fourths annual ACM symposium on theory of computing (STOC '72), 1972, pp. 143-150.

[8]. Garey M.R., Johnson D.S. Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completeness. Freeman, San Francisco, 1979, 338 p.

[9]. Johnson D.S. Near-optimal Bin Packing Algorithms. PhD Thesis, Massachusetts Institute of Technology, Department of Mathematics, Cambridge, 1973, 401 p.

[10]. Vliet A. An improved lower bound for on-line bin packing algorithms. Journal of information Processing Letters, vol. 43, issue 5, 1992, pp. 277-284.

[11]. Coffman E.G., Courcoubetis C., Garey M.R., Johnson D.S., McGeoch L.A., Shor P.W., Weber R. and Yannakakis M. Fundamental discrepancies between average-case analysis under discrete and continuous distributions: a bin packing study. In Proc. of the twenty-third annual ACM symposium on Theory of Computing (STOC '91), 1991, pp. 230-240.

[12]. Shor P.W. How to pack better than Best Fit: tight bounds for average-case online Bin Packing. In Proc. of the 32nd Annual Symposium of foundations of Computer Science, 1991, pp. 752-759.

[13]. Coffman E.G., Shor P.W. Packing in two dimensions: Asymptotic average-case analysis of algorithms. Algorithmica, vol. 9, issue 3, 1993, pp. 253-277.

[14]. Kuzjurin N.N., Pospelov A.I. Probabilistic analysis of a new class of strip packing algorithms. Computational Mathematics and Mathematical Physics, vol. 51, no. 10, 2011, pp. 1817–1822.

[15]. Trushnikov M.A. On one problem of Koffman-Shor connected to strip packing problem. Trudy ISP RAN/Proc. ISP RAS, vol. 22, 2012, pp. 456-462, doi: 10.15514/ISPRAS-2012-22-24

[16]. Trushnikov M.A. Probabilistic analysis of a new strip packing algorithm. Trudy ISP RAN/Proc. ISP RAS, vol. 24, 2013, pp. 457-468, doi: 10.15514/ISPRAS-2013-24-21

[17]. Lazarev D.O., Kuzyrin N.N. An algorithm for Multiple Strip Package and its average case evaluation. Trudy ISP RAN/Proc. ISP RAS, vol. 29, issue 6, 2017. pp. 221-228 (in Russian). DOI: 10.15514/ISPRAS-2017-29(6)-13