

DOI: 10.15514/ISPRAS-2019-31(6)-14



Исследование влияния регулярных магнитных полей на течения во внешних кольцах галактик

¹ Е.А. Михайлов, ORCID: 0000-0002-9747-4039 <ea.mikhajlov@physics.msu.ru>^{2,3} И.Н. Сибгатуллин, ORCID: 0000-0003-2265-3259 <sibgat@ocean.ru>¹ Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, 119991, Россия, Москва, Ленинские горы, д. 1² Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, 117218, Россия, г. Москва, Нахимовский пр., д. 36³ Институт системного программирования им. В.П. Иванникова РАН, 109004, Россия, г. Москва, ул. А. Солженицына, д. 25

Аннотация. В настоящее время практически не вызывает сомнений наличие крупномасштабных магнитных полей в спиральных галактиках. Их эволюция описывается с помощью механизма динамо. Динамо основано на совместном действии дифференциального вращения и альфа-эффекта. В случае галактик, как правило, используется планарное приближение, связанное с тем, что галактический диск достаточно тонкий. Отдельный интерес представляют так называемые внешние кольца галактик. Исследование магнитных полей в них имеет некоторые существенные трудности. Во-первых, полагать, что внешнее кольцо является тонким по сравнению с радиальными размерами, уже нельзя. Во-вторых, необходим учет влияния магнитного поля на турбулентные движения межзвездной среды. В настоящей работе представлены результаты моделирования магнитных полей, а также продемонстрировано влияние магнитного поля на турбулентные движения межзвездной среды.

Ключевые слова: магнитные поля; турбулентность; внешние кольца галактик; динамо

Для цитирования: Михайлов Е.А., Сибгатуллин И.Н. Исследование влияния регулярных магнитных полей на течения во внешних кольцах галактик. Труды ИСП РАН, том 31, вып. 6, 2019 г., стр. 215-224. DOI: 10.15514/ISPRAS-2019-31(6)-14

Благодарности: Работа была выполнена при поддержке РФФИ (проекты 18-32-00124 и 18-02-00085).

Research of influence of regular magnetic fields on flows in outer rings of galaxies

¹ E.A. Mikhailov, ORCID: 0000-0002-9747-4039 <ea.mikhajlov@physics.msu.ru>^{2,3} I.N. Sibgatullin, ORCID: 0000-0003-2265-3259 <sibgat@ocean.ru>¹ Lomonosov Moscow State University, GSP-1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia.² Shirshov Oceanology Institute of the Russian Academy of Sciences, 36, Nakhimovsky prospect, Moscow, 117218, Russia³ Ivannikov Institute for System Programming of the Russian Academy of Sciences, 25, Alexander Solzhenitsyn st., Moscow, 109004, Russia

Abstract. Now it is no doubt that there are large-scale magnetic fields in the spiral galaxies. Their evolution is described by the dynamo mechanism which is based on joint action of differential rotation and alpha-

effect. For galaxies usually the no- z approximation is used, which takes into account that the galaxy disk is quite thin. It is necessary to study so-called outer rings of galaxies. Studying the magnetic fields there is quite difficult. Firstly, we cannot say that the outer ring is thinner than the radial lengthscale. Secondly, it is necessary to take into account the influence of the magnetic field on the turbulent motions. In this work we present the results of the magnetic field modeling, and also demonstrate the influence of the magnetic field on the turbulent motions of the interstellar medium.

Keywords: magnetic fields; turbulence; outer rings of galaxies; dynamo

For citation: Mikhailov E.A., Sibgatullin I.N. Research of influence of regular magnetic fields on flows in outer rings of galaxies. Trudy ISP RAN/Proc. ISP RAS, vol. 31, issue 6, 2019. pp. 215-224 (in Russian). DOI: 10.15514/ISPRAS-2019-31(6)-14

Acknowledgements. This work was supported by RFBR (projects 18-32-00124 and 18-02-00085).

1. Введение

В настоящее время тот факт, что большое количество спиральных галактик обладает крупномасштабными магнитными полями величиной несколько микрогаусс, является твердо установленным и практически не вызывает сомнений [1, 2, 3, 4, 5]. С точки зрения наблюдательной астрономии их наличие было впервые обнаружено с помощью исследований спектра синхротронного излучения [6, 7]. В настоящий момент основным методом исследования крупномасштабных магнитных полей является исследование фарадеевского вращения плоскости поляризации электромагнитных волн, которое измеряется с помощью современных радиотелескопов. Можно показать, что вращение плоскости поляризации пропорционально составляющей магнитного поля, параллельной лучу зрения, умноженной на квадрат длины волны [8, 9]. Исследуя плоскость поляризации на разных длинах волн, можно восстановить характерную структуру магнитного поля для различных галактических объектов [10, 11, 12, 13, 14, 15].

С теоретической точки зрения генерация магнитных полей в астрофизических объектах (как галактиках, так и звездах, планетах и т.д.), как правило, описывается с помощью механизма динамо, описывающего переход энергии движения среды в энергию магнитного поля [16, 17]. Различают мелкомасштабное магнитное поле, имеющее характерные линейные масштабы изменения порядка нескольких десятков килопарсек, а также регулярные структуры магнитного поля, являющиеся результатом усреднения по соответствующим пространственным масштабам. Если говорить о крупномасштабных структурах магнитного поля, имеющих ключевое значение в понимании эволюции различных процессов, его генерация обусловлена так называемым механизмом динамо, являющегося результатом совместного действия альфа-эффекта, характеризующего закрученность турбулентных движений, и дифференциального вращения, которое связано с нетвердотельностью вращения галактики вокруг своей оси [2]. Им противодействует турбулентная диффузия, которая стремится разрушить крупномасштабные структуры магнитного поля. Ввиду этого механизм динамо является пороговым: генерация магнитного поля возможна только в случае, если совместная интенсивность альфа-эффекта и дифференциального вращения достаточно высока, чтобы противостоять диссипативным процессам [2]. Она характеризуется так называемым динамо-числом, включающим в себя полутолщину диска, скорость турбулентных движений и угловую скорость вращения. Как правило, рост магнитного поля возможен в случае, если оно превышает определенное значение, называемое критическим [2].

В настоящее время большой интерес представляют не только сами спиральные галактики, но и так называемые внешние кольца, которые окружают некоторые из них [18, 19, 20]. Они имеют небольшую ширину, и могут лежать как в плоскости диска, так и быть перпендикулярными к нему (отметим, что промежуточные положения являются достаточно редкими). В них имеют место аналогичные эффекты, которые могут также

обуславливать действие механизма динамо и обеспечивать наличие в них магнитных полей. Нельзя также не отметить ряд наблюдательных предпосылок к наличию магнитных полей во внешних кольцах галактик. Тем не менее, процесс теоретического исследования магнитных полей во внешних кольцах наталкивается на ряд достаточно серьезных трудностей.

Дело в том, что уравнение динамо среднего поля (также называемое уравнением Штеенбека – Краузе – Рэдлера) является достаточно сложным для решения как с аналитической, так и с вычислительной точки зрения. Как правило, в случае галактик для этого применяются различные приближения, позволяющие существенно упростить процесс решения. Одним из самых популярных подходов является так называемое планарное приближение [21, 22, 23]. Оно основано на том факте, что галактический диск достаточно тонкий. По этой причине можно приближенно считать, что магнитное поле лежит в плоскости галактического диска. Кроме того, некоторые частные производные магнитного поля в вертикальном направлении можно заменить на алгебраические выражения, а другие – восстановить с помощью условия соленоидальности. Это позволяет сократить число неизвестных функций до двух, и существенно упростить процесс решения задачи. Первые оценки для магнитных полей во внешних кольцах галактик были получены с использованием планарного приближения [24]. Хотя они и дают достаточно разумную с качественной точки зрения картину, нельзя не отметить, что изначальные предпосылки, которые использовались при построении модели, оказываются неверны в случае исследования внешних колец. Так, полутолщину кольца уже нельзя считать малой на фоне его размеров в радиальном направлении. Это ставит нас перед необходимостью использования других моделей для магнитного поля. Один из возможных подходов – использование модели динамо в торе [25, 26, 27, 28, 29]. Она исходит из достаточно разумных представлений об осесимметричности решения, и использует представление магнитного поля в виде комбинации из тороидальной компоненты, а также ротора тороидальной части векторного потенциала. В таком случае возможно получить различные решения для магнитного поля, которые аккуратно учитывают вертикальную структуру, и дают возможность вычислить поля различной симметрии. Так, динамо в торе предусматривает возможность генерации не только квадрупольного, но и дипольного магнитного поля [28, 29]. Хотя оно и генерируется лишь в случае крайне интенсивных движений межзвездной среды, нельзя не отметить, что при использовании планарного приближения, популярного в случае галактического магнитного поля, принципиально (в силу построения модели) возможна генерация лишь квадрупольных, симметричных относительно экваториальной плоскости структур.

Другая сложность связана с необходимостью изучения влияния магнитного поля на турбулентные движения межзвездной среды, которые должны очевидно иметь место как в основной части галактики, так и во внешних кольцах. Дело в том, что достаточно быстро магнитное поле приобретает энергию, сопоставимую или даже превышающую типичное значение энергии турбулентных движений, которые изначально присутствуют в межзвездной среде. Поэтому логично предположить, что по мере роста магнитного поля его влияние на турбулентность будет заметно возрастать. Можно даже предположить, что турбулентность в том виде, в котором она существует во внешних кольцах галактик, обусловлена именно действием магнитного поля. Дополнительным доводом в пользу этого является то, что в отличие от основной части галактики, где турбулентность связана, по-видимому, с наличием взрывов сверхновых, во внешних кольцах их количество заметно меньше, что требует поиска нового источника для турбулентных движений, одним из которых может быть магнитное поле.

Основной целью нашей работы является представление одного из возможных представлений о характере эволюции магнитного поля во внешних кольцах галактик, связанным с использованием модели динамо в торе. После этого мы планируем обсудить

характерную структуру магнитного поля, которая получается при использовании соответствующих уравнений. Затем мы проводим процесс решения уравнений для движения межзвездной среды, в которые включено действие электромагнитной силы, обусловленной влиянием магнитного поля, полученного в нашей модели. Представлены характерные картины турбулентных движений при наличии магнитного поля. Исследуется спектр турбулентности, которая связана с наличием крупномасштабного магнитного поля.

После этого обсуждается возможность применения полученных решений для изучения как внешних колец галактик, так и других объектов с качественно сходной структурой – таких как, к примеру, аккреционные диски, образующиеся около массивных объектов – белых карликов, черных дыр и т.д.

2. Генерация магнитного поля

Галактическое магнитное поле $\vec{H}$ включает в себя две основных составляющих :

$$\vec{H} = \vec{B} + \vec{b},$$

где $\vec{b}$ – мелкомасштабная часть, имеющая характерный масштаб изменения около 50 пк, а $\vec{B}$ – крупномасштабная составляющая, являющаяся результатом усреднения и меняющаяся достаточно плавно.

Для эволюции крупномасштабного магнитного поля можно записать уравнение динамо среднего поля, также называемое в астрофизической литературе уравнением Штеенбека – Краузе – Рэдлера:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot}[\vec{V}, \vec{B}] + \text{rot}(\alpha \vec{B}) + \eta \Delta \vec{B},$$

где $\vec{V}$ - скорость крупномасштабных движений межзвездной среды, α - коэффициент, отвечающий за альфа-эффект, η - коэффициент турбулентной диффузии.

Как правило, предполагается, что крупномасштабные движения обусловлены вращением галактики (или внешнего кольца), поэтому можно считать, что:

$$\vec{V} = r\Omega \vec{e}_\phi,$$

где Ω - угловая скорость вращения объекта.

Для альфа-эффекта часто используют следующее выражение:

$$\alpha = \frac{\Omega l^2 z}{h},$$

где h - полутолщина диска или кольца, l - характерная длина свободного пробега для частиц (как правило, составляющая величину от 50 до 100 пк).

При решении уравнений для эволюции крупномасштабной составляющей магнитного поля удобно представить его в виде следующей комбинации [25]:

$$\vec{B} = B \vec{e}_\phi + \text{rot}(A \vec{e}_\phi),$$

где B – тороидальная часть магнитного поля, A – тороидальная часть векторного потенциала (ее ротор описывает в осесимметричном случае полоидальную часть магнитного поля объекта).

В таком случае уравнения для магнитного поля можно записать в следующей форме [25, 26, 27, 28, 29]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} &= \frac{\Omega l^2 z}{h} B + \eta \Delta A; \\ \frac{\partial B}{\partial t} &= \Omega \frac{\partial A}{\partial z} + \eta \Delta B. \end{aligned}$$

Достаточно удобно использовать безразмерные переменные, измеряя расстояния в радиусах кольца R , а времена в единицах $\frac{a^2}{\eta}$, где a – полуширина кольца. В таком случае уравнения можно переписать в следующем виде [27, 28]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial t} &= R_\alpha z B + \lambda^2 \Delta A; \\ \frac{\partial B}{\partial t} &= R_\omega \frac{\partial A}{\partial z} + \lambda^2 \Delta B;\end{aligned}$$

где введены несколько безразмерных параметров [28, 29]:

$$\begin{aligned}R_\alpha &= \frac{\Omega l^2 a^2}{\eta h^2}; \\ R_\omega &= \frac{\Omega a^2}{\eta}; \\ \lambda &= \frac{a}{R};\end{aligned}$$

характеризующие альфа-эффект, дифференциальное вращение и диссипацию в плоскости диска.

В качестве граничных условий можно использовать следующие [25, 26, 27, 28, 29]:

$$B_{z=\pm\lambda/k} = B_{r=1\pm\lambda} = \frac{\partial A}{\partial n_{z=\pm\lambda/k}} = \frac{\partial A}{\partial n_{r=1\pm\lambda}} = 0.$$

Возможность генерации магнитного поля описывается с помощью так называемого динамо-числа, которое вводится как произведение коэффициентов, отвечающих за альфа-эффект и дифференциальное вращение [2]:

$$D = R_\alpha R_\omega.$$

Можно показать, что при $D > 30$ возможна генерация магнитных полей [29]. При больших значениях D становится возможной генерация полей не только квадрупольной, но и дипольной симметрии (рис. 1, штрихпунктирная линия показывает случай дипольного магнитного поля).

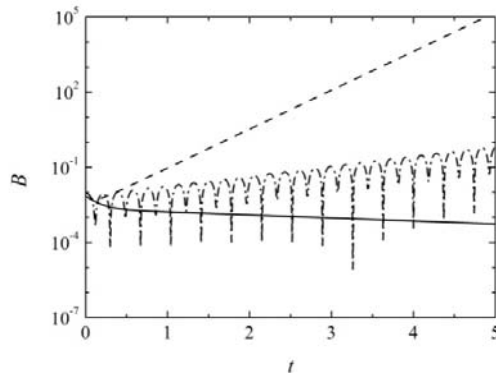


Рис. 1. Эволюция магнитного поля в линейном случае (сплошная линия показывает $D=25$, пунктирная – $D=150$, штрихпунктирная – $D=900$)

Fig. 1. Magnetic field evolution for linear case (solid line shows $D=25$, dashed – $D=150$, dot-dashed – $D=900$)

Разумно учитывать, что при приближении магнитного поля к уровню насыщения его рост будет замедляться. Это может быть учтено с помощью следующей модификации уравнений [27, 28, 29]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial t} &= R_\alpha z B \left(1 - \frac{B^2}{B_0^2}\right) + \lambda^2 \Delta A; \\ \frac{\partial B}{\partial t} &= R_\omega \frac{\partial A}{\partial z} + \lambda^2 \Delta B;\end{aligned}$$

где B_0 – поле насыщения. Измеряя поле в единицах насыщения, можно записать уравнения в полностью безразмерной форме [29]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial t} &= R_\alpha z B (1 - B^2) + \lambda^2 \Delta A; \\ \frac{\partial B}{\partial t} &= R_\omega \frac{\partial A}{\partial z} + \lambda^2 \Delta B.\end{aligned}$$

Характерные решения представлены на рис. 2. Структура квадрупольного магнитного поля показана на рис. 3, дипольного – на рис. 4.

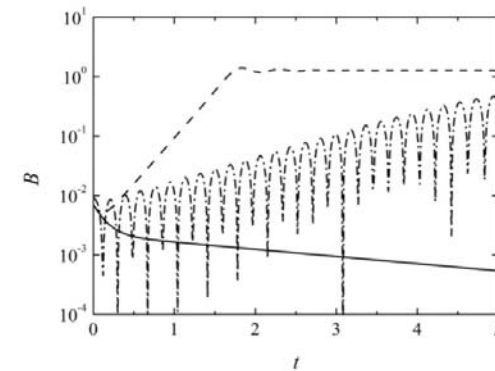


Рис. 2 Эволюция магнитного поля в нелинейном случае (сплошная линия показывает $D=25$, пунктирная – $D=150$, штрихпунктирная – $D=900$)

Fig. 2. Magnetic field evolution for nonlinear case (solid line shows $D=25$, dashed – $D=150$, dot-dashed – $D=900$)

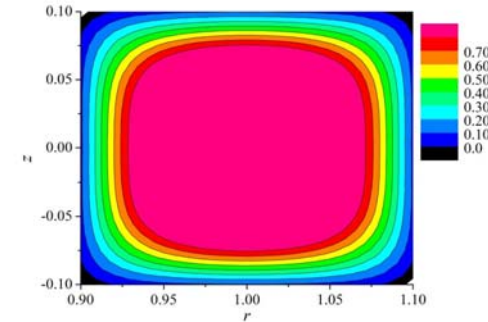


Рис. 3. Магнитное поле квадрупольной симметрии

Fig. 3. Magnetic field of quadrupolar symmetry

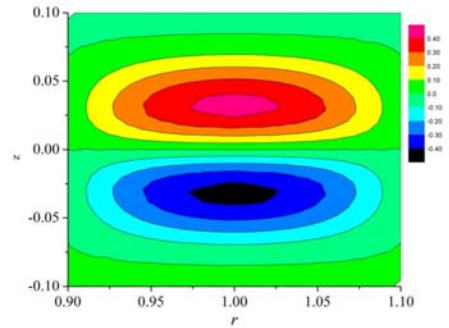


Рис. 4. Магнитное поле дипольной симметрии
Fig. 4. Magnetic field of dipolar symmetry

В случае магнитного поля квадрупольной симметрии можно полагать, что его зависимость от координат будет иметь следующий вид:

$$B = B_0 \cos\left(\frac{\pi z k}{2\lambda}\right) \cos\left(\frac{\pi(r-R)}{2\lambda}\right);$$

где введено безразмерное число

$$k = \frac{a}{h}.$$

3. Влияние магнитного поля на турбулентные движения

При изучении влияния магнитного поля на турбулентные движения необходимо решать уравнение Навье – Стокса:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g} - \vec{f}_{\text{Cor}} + \vec{f}_L + \beta \Delta \vec{v};$$

где $\vec{g}$ - сила тяжести, $\vec{f}_{\text{Cor}}$ - сила Кориолиса, $\vec{f}_L$ - сила Лоренца, определяемая по правилу:

$$\vec{f}_L = \frac{1}{4\pi\rho} [\vec{B}, \text{rot } \vec{B}],$$

где в качестве поля используются данные, представленные в предыдущем разделе.

Поскольку рассматривается сегмент внешнего кольца галактики, то расстояние от центра и, соответственно, радиус кривизны настолько велики, что в настоящей работе эффектами кривизны пренебрегается. Поэтому область течения принимается прямоугольной, с периодическими условиями в азимутальном направлении.

Известно, что сдвиговые течения могут являться линейно устойчивыми, в частности, плоскопараллельное течение Куэтта с линейным профилем скорости является устойчивым для конечных значений числа Рейнольдса. В галактических кольцах одним из дестабилизирующих факторов, способствующих формированию турбулентных режимов, может явиться последовательность взрывов сверхновых. Для моделирования локальных возмущений в качестве начального состояния был задан ряд локальных конвективных возмущений поля скорости.

В настоящей работе мы провели прямое численное моделирование турбулентных течений при дипольном и квадрупольном магнитном поле, ориентированном в азимутальном направлении, при умеренных числах Рейнольдса 10^4 - 10^5 . Для прямого численного моделирования использовался метод спектральных элементов, представляющий из себя вариант метода конечных элементов. В каждом элементе проводится ортогональное

разложение по полиномам Лагранжа в точках Гаусса-Лобатто-Лежандра [30, 31]. Подобный подход позволяет избежать численной диффузии.

На рисунках ниже представлены характерные турбулентные режимы в отсутствие магнитного поля (рис 5), дипольном (рис. 6) и квадрупольном (рис. 7) воздействии.



Рис. 5. Модуль скорости в отсутствие магнитного поля
Fig. 5. The velocity module in the absence of a magnetic field



Рис. 6. Модуль скорости при магнитном поле дипольной симметрии
Fig. 6. The velocity module in a magnetic field of dipole symmetry



Рис. 7. Модуль скорости при магнитном поле квадрупольной симметрии
Fig. 7. The velocity module in a magnetic field of quadrupole symmetry

Магнитное поле и сила Кориолиса изменяет мелкомасштабную структуру и формирование когерентных структур в турбулентном течении, их количественная оценка является предметом анализа в настоящее время.

4. Заключение

В настоящей работе был исследован процесс генерации магнитных полей во внешних кольцах галактик, а также их влияние на турбулентные движения. Полученные результаты могут представлять интерес не только для внешних колец, но и для других объектов, таких как, например, аккреционные диски.

Список литературы / References

- [1]. Beck R., Brandenburg A., Moss D., Shukurov A., Sokoloff D. Galactic Magnetism: Recent Developments and Perspectives. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, vol. 34, 1996, pp.155-206.
- [2]. Beck R. Galactic and extragalactic magnetic fields. *Space Science Reviews*, vol. 99, 2001, pp. 243-260.
- [3]. Arshakian T., Beck R., Krause M., Sokoloff D. Evolution of magnetic fields in galaxies and future observational tests with the Square Kilometre Array. *Astronomy and Astrophysics*, vol. 494, 2009, pp.21-32.
- [4]. Beck R. Magnetic fields in galaxies. *Space Science Reviews*, vol. 166, 2012, pp.215-230.
- [5]. Beck R. Magnetic fields in spiral galaxies. *The Astronomy and Astrophysics Review*, vol. 24, 2015, article id.4.
- [6]. Ginzburg V.L. Radio astronomy and the origin of cosmic rays. In *Paris Symposium on Radio Astronomy*, IAU Symposium no. 9 and URSI Symposium no. 1, Stanford University Press, 1959, p. 589-594.
- [7]. Beck R. Magnetic field structure from synchrotron polarization. *European Astronomical Society Publications Series*, vol. 23, 2007, pp.19-36.

Информация об авторах / Information about authors

Евгений Александрович МИХАЙЛОВ – кандидат физико-математических наук, ассистент физического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова с 2016 г. Сфера научных интересов: теория динамо, магнитные поля галактик.

Evgeny Alexandrovich MIKHAILOV – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, assistant of Faculty of Physics of Lomonosov Moscow State University. Research interests: dynamo theory, magnetic fields of galaxies.

Ильяс Наилевич СИБГАТУЛЛИН – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института океанологии им. П.П. Ширшова Российской академии наук, Москва. Сфера интересов: конвекция, стратифицированные среды, внутренние волны, инерционные волны, турбулентность, нелинейная динамика

Ilias Nailevich SIBGATULLIN – candidate of Physical and Mathematical Sciences, senior researcher at Shirshov Institute of Oceanology of Russian Academy of Sciences. Research interests: convection, internal waves, inertial waves, turbulence, nonlinear dynamics.

- [8]. Ginzburg V.L. The propagation of electromagnetic waves in plasmas. Pergamon Press, 1970, 535 p.
- [9]. Зельдович Я.Б., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д. Магнитные поля в астрофизике. Москва–Ижевск, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2006, 384 с. / Zeldovich, Ya.B., Ruzmaikin A.A., Sokoloff D.D. Magnetic fields in space. Moscow–Izhevsk, NIC «Regular and chaotic dynamics», Institute of computer researches, 2006, 384 p. (in Russian).
- [10]. Morris D., Berge G. Direction of the magnetic field in the vicinity of the Sun. *Astrophysical Journal*, vol. 139, 1964, pp.1388-1392.
- [11]. Manchester R.N. Pulsar rotation and dispersion measures and the Galactic magnetic field. *Astrophysical Journal*, vol. 172, 1972, p.43-52.
- [12]. Andreasyan R.R., Makarov A.N. Structure of the Galactic magnetic field. *Astrophysics*, vol. 30, 1989, pp.101-110.
- [13]. Stepanov R., Arshakian T.G., Beck R., Frick P., Krause M. Magnetic field structures of galaxies derived from analysis of Faraday rotation measures, and perspectives for the SKA. *Astronomy & Astrophysics*, vol. 480, 2008, pp. 45-59.
- [14]. Frick P., Sokoloff D., Stepanov R., Beck R. Faraday rotation measure synthesis for magnetic fields of galaxies. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 414, 2011, pp. 2540-2549.
- [15]. Beck, R. Magnetic fields in the nearby spiral galaxy IC 342: A multi-frequency radio polarization study. *Astronomy & Astrophysics*, vol. 578, 2015, A93.
- [16]. Molchanov S.A., Ruzmaikin A.A., Sokoloff D.D. Kinematic dynamo in random flow. *Soviet Physics Uspekhi*, vol. 28, no. 4, 1985, pp. 307-327.
- [17]. Sokoloff D.D., Stepanov R.A., Frick P.G. Dynamo: from an astrophysical model to laboratory experiments. *Physics-Uspekhi*, vol. 57, 2014, pp. 292-311.
- [18]. Buta R., Combes F. Galactic Rings. *Fundamentals of Cosmic Physics*, vol. 17, 1996, pp. 95-281.
- [19]. Athanassoula E., Puerari I., Bosma A. Formation of rings in galactic discs by infalling small companions. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 286, 1997, pp. 284-302.
- [20]. Ilyina M.A., Sil'chenko O.K., Afanasiev V.L. Nature of star-forming rings in S0 galaxies. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 439, 2014, pp. 334-341.
- [21]. Moss D. On the generation of bisymmetric magnetic field structures in spiral galaxies by tidal interactions. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 275, 1995, pp.191-194.
- [22]. Subramanian K., Mestel L. Galactic dynamos and density wave theory - II. an alternative treatment for strong non-axisymmetry. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 265, 1993, pp. 649-654.
- [23]. Mikhailov E.A. Galactic dynamo with helicity fluxes. *Astronomy Letters*, vol. 39, 2013, pp.414-420.
- [24]. Moss D., Mikhailov E., Silchenko O., Sokoloff D., Horellou C., Beck R. Magnetic fields in ring galaxies. *Astronomy and Astrophysics*, vol. 592, 2016, A44.
- [25]. Deinzer W., Grosser H., Schmitt D. Torus dynamos for galaxies and accretion disks. I. The axisymmetric alpha omega-dynamo embedded into vacuum. *Astronomy and Astrophysics*, vol. 273, 1993, pp. 405-414.
- [26]. Brooke J.M., Moss D. Nonlinear Dynamos in Torus Geometry - Transition to Chaos. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 266, 1994, pp. 733-739.
- [27]. Mikhailov E.A. A dynamo in a torus as an explanation of magnetic fields in the outer rings of galaxies. *Astronomy Reports*, vol. 61, 2017, pp.7 39-746.
- [28]. Mikhailov E.A. Torus Dynamo model for study of magnetic fields in the outer rings of galaxies. *Astrophysics*, vol. 61, 2018, pp. 147-159. y
- [29]. Mikhailov E.A., Khokhryakova A.D. Torus dynamo in the outer rings of galaxies. *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, vol. 113, 2019, pp.199-207.
- [30]. Fischer P. An overlapping Schwarz method for spectral element solution of the incompressible Navier-Stokes equations. *Journal of Computational Physics*. vol. 133, issue 1, 1997, pp. 84-101.
- [31]. Deville, M., Fischer, P., Mund, E. High-Order Methods for Incompressible Fluid Flow. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2002. 528 p.