DOI: 10.15514/ISPRAS-2019-31(5)-17

Процедуры поиска лорановых и регулярных решений линейных дифференциальных уравнений с усеченными степенными рядами в роли коэффициентов

С.А. Абрамов, ORCID: 0000-0001-7745-5132 <sergeyabramov@mail.ru>
Д.Е. Хмельнов, ORCID: 0000-0002-4602-2382 <dennis_khmelnov@mail.ru>
А.А. Рябенко, ORCID: 0000-0001-5780-7743 <anna.ryabenko@gmail.com>

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына
Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН,
119333, Россия, Москва, ул. Вавилова, 40

Аннотация. Обсуждаются задачи построения лорановых и регулярных решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Предполагается, что коэффициентами уравнений являются формальные степенные ряды, которые заданы в виде их усечений, то есть в виде начальных отрезков рядов, и что степень этих начальных отрезков может быть различна. Рассматриваемые виды решений также содержат степенные ряды. Интересует нахождение максимально возможного числа коэффициентов этих рядов в решениях, таких что они являются инвариантными относительно различных возможных продлений усечений рядов – коэффициентов заданного уравнения. В настоящей статье дается беглый обзор алгоритмов для решения такой задачи и представляется реализация этих алгоритмов в виде Maple-процедур. Рассматриваются линейные обыкновенные дифференциальные уравнения с бесконечными (формальными) степенными рядами в роли коэффициентов, при этом эти ряды задаются в усеченном виде. Предлагаются компьютерно-алгебраические процедуры (они реализованы в среде Maple) построения решений двух видов. Эти решения содержат, в свою очередь, степенные ряды. Исходя из заданных усеченных рядов-коэффициентов уравнения, процедуры находят максимально возможное число членов рядов, входящих в решения.

Ключевые слова: усеченные степенные ряды; линейные обыкновенные дифференциальные уравнения; лорановы решения; регулярные решения; компьютерная алгебра; Maple

Для цитирования: Абрамов С.А., Рябенко А.А., Хмельнов Д.Е Процедуры поиска лорановых и регулярных решений линейных дифференциальных уравнений с усеченными степенными рядами в роли коэффициентов. Труды ИСП РАН, том 31, вып. 5, 2019 г., стр. 233-248. DOI: 10.15514/ISPRAS-2019-31(5)-17

Благодарности: Исследование частично поддержано РФФИ, грант 19-01-00032

Procedures to search for Laurent and regular solutions of linear ordinary differential equations with truncated power series coefficients

S.A. Abramov, ORCID: 0000-0001-7745-5132 <sergeyabramov@mail.ru>
D.E. Khmelnov, ORCID: 0000-0002-4602-2382 <dennis_khmelnov@mail.ru>
A.A. Ryabenko, ORCID: 0000-0001-5780-7743 <anna.ryabenko@gmail.com>

Dorodnicyn Computing Center,
Federal Research Center «Computer Science and Control» of Russian Academy of Sciences,
40, ul. Vavilova, Moscow, 119333, Russia

Abstract. We previously published algorithms for searching the so-called Laurent and regular solutions of linear ordinary differential equations with infinite formal power series in the role of coefficients. The question of infinite series representation is very important for computer algebra. In those algorithms the series are given in truncated form, which means that we do not have complete information about the equation under consideration. Based on this incomplete information, algorithms give the maximum possible number of terms of the series included in the solutions. We are interested in the information about these solutions that is invariant to possible prolongations of those truncated series that represent the coefficients of the equation. The mentioned publications reported preliminary (trial) versions for procedures, which implement these algorithms, as well as experiments with them. To date, the procedures have been improved, the interface and data presentation are designed for them in a uniform manner. The advanced procedures are discussed in the current paper. The various examples are presented which illustrates the use of the procedures, including their optional parameters. These procedures are available from the web page http://www.ccas.ru/ca/TruncatedSeries.

Keywords: truncated power series; linear ordinary differential equations; Laurent solutions; regular solutions; computer algebra; Maple

For citation: Abramov S.A., Khmelnov D.E., Ryabenko A.A. Procedures to search for Laurent and regular solutions of linear ordinary differential equations with truncated power series coefficients. Trudy ISP RAN/Proc. ISP RAS, vol. 31, issue 5, 2019, pp. 233-248 (in Russian). DOI: 10.15514/ISPRAS-2019-31(5)-17

Acknowledgements. The study was partially supported by RFBR, grant 19-01-00032

1. Введение

В [1], [2] были предложены алгоритмы поиска так называемых лорановых и регулярных решений (определения даются в подразд. 2.2) линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с бесконечными формальными степенными рядами в роли коэффициентов.

Вопрос представления бесконечных рядов очень существен для компьютерной алгебры. В данном случае ряды задаются в усеченном виде, что означает, что мы не располагаем полной информацией об уравнении. Исходя из этой неполной информации, алгоритмы дают максимально возможное число членов рядов, входящих в решения.

В [1], [2] сообщалось о предварительных (пробных) вариантах реализующих эти алгоритмы процедур и экспериментах с ними. К настоящему времени процедуры усовершенствованы, интерфейс и представление данных выбраны для них единообразно. Усовершенствованные процедуры обсуждаются ниже в статье. Эти процедуры находятся в свободном доступе и доступны на веб-станице http://www.ccas.ru/ca/TruncatedSeries.

2. Предварительные сведения

2.1 Уравнения, операторы, усеченные ряды

Пусть K – алгебраически замкнутое числовое поле. Для кольца полиномов от x над K мы в дальнейшем используем обычные обозначение $K[x]$. Кольцо формальных степенных рядов от x над K обозначается через $K[[x]]$, поле формальных лорановых рядов – через $K((x))$. Для ненулевого элемента $a(x) = \sum a_i x^i$, принадлежащего $K((x))$, его *валюация* $val_x a(x)$ определена равенством $val_x a(x) = min\{i | a_i \neq 0\}$, при этом $val_x 0 = \infty$. Пусть $t \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$. t-*усечение* $a^{\langle t \rangle}(x)$ получается отбрасыванием всех членов $a(x)$ степени большей, чем t; если $t = -\infty$, то $a^{\langle t \rangle}(x) = 0$. Число t называется *степенью усечения*.

В настоящей статье дифференциальные уравнения будет удобно записывать с помощью операции $\theta = x\frac{d}{dx}$ вместо обычной операции дифференцирования (переход от одной формы записи к другой выполняется легко). Мы рассматриваем уравнения вида

$$a_r(x)\theta^r y + a_{r-1}(x)\theta^{r-1} y + \cdots + a_0(x) y = 0, \tag{1}$$

где y – неизвестная функция x. Относительно $a_0(x), a_1(x), \dots, a_r(x)$ (будем называть их *коэффициентами уравнения*) предполагается, что $a_i(x) \in K[[x]]$, при этом *ведущий* коэффициент $a_r(x)$ не равен нулю. Также предполагается, что валюация хотя бы одного из коэффициентов $a_0(x), a_1(x), \dots, a_r(x)$ равна нулю.

Уравнение (1) может быть записано как $\mathcal{L}(y) = 0$, где оператор $\mathcal{L}$ имеет вид

$$\sum_{i=0}^{r} a_i(x)\,\theta^i \in K[[x]][\theta], \tag{2}$$

число r является *порядком* оператора $\mathcal{L}$.

Далее считаем, что задан дифференциальный оператор L с полиномиальными коэффициентами:

$$\sum_{i=0}^{r} a_i(x)\,\theta^i \in K[x][\theta], \tag{3}$$

и заданы неотрицательные целые $t_o, t_1, \dots, t_r$ такие, что $t_i \geq \deg a_i(x), i = 0,1, \dots, r$. Предполагается при этом, что $a_r(x) \neq 0$ и что валюация по крайней мере одного из полиномов $a_0(x), a_1(x), \dots, a_r(x)$ равна нулю:

$$\exists i \colon \mathrm{val}\, a_i(x) = 0 \tag{4}$$

Определение 1. *Продолжением* оператора L будем называть любой оператор

$$\tilde{L} = \sum_{i=0}^{r} \tilde{a}_i(x)\,\theta^i \in K[[x]][\theta],$$

для которого $\tilde{a}_i(x) - a_i(x) = O(x^{t_i+1})$, т.е.$\mathrm{val}\left(\tilde{a}_i(x) - a_i(x)\right) > t_i, i = 0.1, \dots, r$.

Усеченному дифференциальному уравнению

$$\sum_{i=0}^{r} (a_i(x) + O(x^{t_i+1}))\theta^i y = 0, \tag{5}$$

$t_i \geq \deg a_i(x), i = 0,1, \dots, r,$ мы сопоставляем оператор (3), а также набор чисел $t_0, t_1, \dots, t_r$. Продолжение оператора (3) будет в этом случае называться также *продолжением уравнения*.

Если L (или $\mathcal{L}$) – некоторый дифференциальный оператор, то под *решениями оператора* L (или $\mathcal{L}$) мы понимаем решения уравнения $L(y) = 0$ (соответственно, $\mathcal{L}(y) = 0$).

В случае, когда L – усеченный вариант оператора $\mathcal{L}$, будем называть L и $L(y) = 0$ *усечениями* оператора $\mathcal{L}$ и соответственно уравнения $\mathcal{L}(y) = 0$.

2.2 Лорановы и регулярные решения уравнений

Решение дифференциального уравнения, являющееся формальным лорановым рядом, называется *лорановым*.

Регулярное решение имеет вид

$$y(x) = x^\lambda w(x), \tag{6}$$

где $\lambda \in K, w(x) \in K\big((x)\big)[\ln x]$. Каждое такое решение записывается как

$$x^\lambda \sum_{s=0}^{k} g_{k-s}(x)\frac{\ln^s x}{s!}, \tag{7}$$

где $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и $g_s(x) \in K\big((x)\big), s = 0,1, \dots, k$. Мы в этом случае говорим, что x^λ – степенной множитель решения $y(x)$.

Набор

$$x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}, \dots, x^{\lambda_p} \tag{8}$$

называется *полным* набором степенных множителей регулярных решений уравнения $\mathcal{L}(y) = 0$, если

- среди показателей степени элементов набора (8) нет различающихся на целое число,
- каждый элемент x^{λ_i} набора (8) является степенным множителем для некоторого ненулевого регулярного решения уравнения $\mathcal{L}(y) = 0$,
- для каждого ненулевого регулярного решения уравнения $\mathcal{L}(y) = 0$ среди (8) найдется степенной множитель для этого решения.

Примечание 1. Согласно принятому в компьютерной алгебре определению (см., например, [3]) любая линейная комбинация над K решений вида (6) также называется регулярным решением.

3. Алгоритмы построения решений

3.1 Лорановы решения

Пусть дифференциальное уравнение $\mathcal{L}(y) = 0$ имеет ненулевые лорановы решения и $y(x) = \sum_{n=v}^{\infty} c_n x^n$ – общее лораново решение, его коэффициенты c_n содержат произвольные постоянные. Алгоритм, предложенный в [4, разд. 6], позволяет для $\mathcal{L}(y) = 0$ построить усечение общего лоранового решения любой заданной степени m: $y^{\langle m \rangle}(x) = \sum_{n=v}^{m} c_n x^n$.

В [1] показано, что для уравнения (5) с усеченными коэффициентами можно найти усечения максимально высоких степеней для лорановых решений, обеспечивая при этом инвариантность эти усечений относительно всевозможных продолжений уравнения. Был предложен алгоритм, входом которого являются оператор $L \in K[x][\theta]$ и неотрицательные целые $t_0, t_1, \dots, t_r$, имеющие тот же смысл, что и в (3). Алгоритм строит конечное множество W выражений вида

$$y^{\langle m \rangle}(x, C_1, \dots, C_r) + O(x^{m+1}), \tag{9}$$

где $y(x, C_1, \dots, C_r) \in K[C_1, \dots, C_r]\big((x)\big)$, обладающее свойствами (под решениями понимаются решения, принадлежащие $K((x))$):

- если (9) является элементом множества W, то для любого продолжения $\tilde{L}$ оператора L найдется его решение $\tilde{y}(x)$, для которого существуют $\tilde{C}_1, \dots, \tilde{C}_r \in K$ такие, что
$$\tilde{y}(x) = y^{\langle m \rangle}\big(x, \tilde{C}_1, \dots, \tilde{C}_r\big) + O(x^{m+1}),$$

$$\operatorname{val}\tilde{y}(x) = \operatorname{val} y(x, C_1, \dots, C_r);$$

- если $\tilde{y}(x)$ – решение некоторого продолжения $\tilde{L}$ оператора L, и существует элемент (9) множества W такой, что выполняется
$$\operatorname{val}\tilde{y}(x) = \operatorname{val} y(x, C_1, \dots, C_r), \tag{10}$$
- то найдутся $\tilde{C}_1, \dots, \tilde{C}_r \in K$ такие, что
$$\tilde{y}(x) = y^{\langle m\rangle}(x, \tilde{C}_1, \dots, \tilde{C}_r) + O(x^{m+1});$$
- значения m являются наибольшими из возможных значений, указанным образом связанных с каждым элементом множества W.

В множество W включаются все выражения вида (9), обладающие этими свойствами.

3.2 Регулярные решения

Пусть дифференциальное уравнение $\mathcal{L}(y) = 0$ имеет ненулевые решения вида (7). Алгоритмы построения таких решений обсуждаются в [5]-[13]. С помощью этих алгоритмов можно построить усечение общего регулярного решения любой заданной степени усечения m. Т.е. для всех рядов, входящих в решение, вычисляются коэффициенты до степени m, вычисленные коэффициенты могут содержать произвольные постоянные.

Для уравнения (5) с усеченными коэффициентами алгоритм, предложенный в [2], строит регулярные решения с максимально большими усечениями, водящих в них рядов, такими, что решения являются инвариантными относительно различных возможных продолжений уравнения. Входом алгоритма снова являются оператор $L \in K[x][\theta]$ и неотрицательные целые $t_0, t_1, \dots, t_r$. В результате применения алгоритма становится известным полный набор (8) степенных множителей регулярных решений, одинаковый для всех возможных продолжений оператора L. Для каждого допустимого множителя x^λ строится $W(\lambda)$ – конечное множество выражений вида

$$x^\lambda \sum_{s=0}^{k} \frac{ln^s x}{s!}\left(g_{k-s}^{\langle m_s\rangle}\big((x, C_1, \dots, C_r) + O(x^{m_s+1})\big)\right), \tag{11}$$

где $g_s(x, C_1, \dots, C_r) \in K[C_1, \dots, C_r]\big((x)\big)$ для $s = 0,1, \dots, k$, обладающее свойствами:

- если (11) является элементом множества $W(\lambda)$, то для любого продолжения $\tilde{L}$ оператора L найдется его решение $\tilde{y}(x) = x^\lambda \sum_{s=0}^{k} \tilde{g}_{k-s}(x)\frac{ln^s x}{s!}$, для которого существуют $\tilde{C}_1, \dots, \tilde{C}_r \in K$ такие, что
$$\tilde{g}_s(x) = g_s^{\langle m_s\rangle}(x, \tilde{C}_1, \dots, \tilde{C}_r) + O(x^{m_s+1}),$$
$$\operatorname{val}\tilde{g}_s(x) = \operatorname{val} g_s(x, C_1, \dots, C_r)$$
для $s = 0,1, \dots, k$;
- если $\tilde{y}(x) = x^\lambda \sum_{s=0}^{k} \tilde{g}_{k-s}(x)\frac{ln^s x}{s!}$ – решение некоторого продолжения $\tilde{L}$ оператора L, и существует элемент (11) множества $W(\lambda)$ такой, что выполняется
$$\operatorname{val}\tilde{g}_s(x) = \operatorname{val} g_s(x, C_1, \dots, C_r), \tag{12}$$
для $s = 0,1, \dots, k$, то найдутся $\tilde{C}_1, \dots, \tilde{C}_r \in K$ такие, что
$$\tilde{g}_s(x) = g_s^{\langle m_s\rangle}(x, \tilde{C}_1, \dots, \tilde{C}_r) + O(x^{m_s+1})$$
для $s = 0,1, \dots, k$;
- для каждого элемента множества $W(\lambda)$ значения $m_0, m_1, \dots, m_k$ являются наибольшими из возможных, указанным образом связанных с L.

В множество $W(\lambda)$ включаются все выражения вида (11), обладающие этими свойствами, т.е. $W(\lambda)$ содержит полный список формул вида (11), инвариантных относительно продолжений оператора L.

4. Литералы

Пусть задан оператор с полиномиальными коэффициентами $\boldsymbol{L}$ вида (3), набор чисел $t_0, t_1, \dots, t_r$ и пусть коэффициенты $\boldsymbol{L}$ имеют вид

$$a_i(x) = \sum_{j=0}^{t_i} a_{ij}\, x^j, i = 0,1, \dots, r$$

(если $t_i > d_i = \deg a_i(x)$, то $a_{ij} = 0$ для $j = d_i + 1, d_i + 2, \dots, t_i$). Будем говорить, что коэффициенты a_{ij} *незаданы*, если $j > t_i$, для $i = 0,1, \dots, r$.

Помимо построения усечения решений (лорановых и регулярных), инвариантных относительно всех продолжений уравнения $L(y) = 0$, алгоритм позволяет прояснить влияние незаданных коэффициентов на последующие члены рядов, входящих в решения. Для незаданных коэффициентов алгоритм использует символьные обозначения, будем называть их *литералами*.

При рассмотрении продолжения $\tilde{L}$ оператора L может оказаться, что $\tilde{L}$ имеет такое лораново решение $\tilde{y}(x)$, что W не содержит выражения (9), для которого выполняется равенство валюаций (10). Алгоритм может определить, какие условия на незаданные коэффициенты должны быть выполнены, чтобы такое выражение появилось.

При рассмотрении продолжения $\tilde{L}$ оператора L может оказаться, что $\tilde{L}$ имеет такое решение $\tilde{y}(x) = x^\lambda \sum_{s=0}^{k} \tilde{g}_{k-s}(x)\frac{ln^s x}{s!}$, что $W(\lambda)$ не содержит выражения (11), для которого выполняется равенство валюаций (12). Алгоритм может определить, какие условия на незаданные коэффициенты должны быть выполнены, чтобы такое выражение появилось.

Для усеченного уравнения при условии, что свободные члены всех коэффициентов известны и хотя бы один не равен нулю, полный набор степенных множителей одинаков для всех продолжений данного уравнения.

Но максимальные значения k в (7) могут быть различными для разных продолжений. Алгоритм может определить, какие условия на незаданные коэффициенты должны быть выполнены, чтобы максимальные значения k стали инвариантными относительно возможных продолжений уравнения.

5. Процедуры построения решений

Алгоритмы построения рассматриваемых решений реализованы в системе компьютерной алгебры `Maple` ([14]) в виде процедур пакета `TruncatedSeries`[1]. Пакет предоставляет две основных процедуры:

`LaurentSolution` – построение лорановых решений;

`RegularSolution` – построение регулярных решений.

Предварительные реализации этих процедур были представлены в работах [1, 2]. За основу реализации частично взята реализация алгоритмов из пакета EG [13].

5.1 Аргументы и результаты работы процедур

Обе процедуры имеют одинаковые аргументы. Основные аргументы:

[1] Пакет и сессия `Maple` с примерами использования описываемых процедур доступны по адресу http://www.ccas.ru/ca/TruncatedSeries.

- Первый аргумент – дифференциальное уравнение вида (5), где $t_i \geq \deg a_i(x)$, $i = 0,1,\dots,r$. Применение θ^k к неизвестной функции $y(x)$ записывается как `theta(y(x),x,k)`. Вместо оператора θ можно использовать и обычное дифференцирование (оператор $D = \frac{d}{dx}$); применение оператора D^k к неизвестной функции $y(x)$ задается в стандартном для Maple виде `diff(y(x),x$k)`. Усеченные коэффициенты уравнения задаются в виде выражений $a_i(x) + O(x^{t_i+1})$, где $a_i(x)$ – полином степени не выше t_i над полем алгебраических чисел, то есть аналогично математической записи. Нерациональные алгебраические числа в Maple представляются в виде выражения `RootOf(p(_Z), index = k)`, где `p(_Z)` – неприводимый полином, k-м корнем которого и является данное алгебраическое число. Например, `RootOf(Z²-2, index=2) =` $-\sqrt{2}$.
- Второй аргумент – неизвестная функция, например, `y(x)`.

Результат работы процедуры `LaurentSolution` – список усеченных лорановых решений, из множества W, описанного в подразд. 3.1. Каждый элемент списка имеет вид

$$c_{v_j}x^{v_j} + c_{v_j+1}x^{v_j+1} + \dots + c_{m_j}x^{m_j} + O\left(x^{m_j+1}\right), \tag{13}$$

где v_j – валюация, для которой гарантировано существование лоранова решения при любом продолжении заданного уравнения; m_j имеет прежний смысл (см. подразд. 3.1), c_n – вычисленные коэффициенты лоранова решения, которые являются линейными комбинациями произвольных постоянных вида $\_c_0, \_c_1, \dots$

Результат работы процедуры `RegularSolution` – список усеченных регулярных решений, инвариантных относительно продолжений коэффициентов заданного уравнения. Усечения содержат произвольные постоянные вида $\_c_0, \_c_1, \dots$

Могут быть также указаны опциональные параметры:

- `'output'='literal'` – обеспечивает получения ответа не в виде списка инвариантных усечений, а в виде одного усечения с литералами. Все усеченные ряды в ответе имеют вид:

$$c_v x^v + c_{v+1}x^{v+1} + \dots + c_m x^m + O(x^{m+1}), \tag{14}$$

  где $v = \min v_j$, $m = 1 + \max m_j$ коэффициенты c_n будут содержать литералы. Литералы представляются в виде $U_{[i,j]}$ – такой литерал соответствует незаданному коэффициенту при x^j в коэффициенте исходного уравнения при θ^i.
- `'degree'=n`, где n – целое число, – обеспечивает получение усечений решений заданной степени. В этом случае коэффициенты усечений возможно будут выражены через литералы. Степени построенных усечений могут быть больше заданного n, – должно быть вычислено по крайней мере столько коэффициентов, сколько требуется для определения всех возможных валюаций лорановых рядов, входящих в решение.

5.2 Примеры построения лорановых решений

1. Каждое из уравнений

$$\sin x\, \theta y(x) - x \cos x\ y(x) = 0 \tag{15}$$

$$(e^x - 1)\theta y(x) - xe^x y(x) = 0 \tag{16}$$

можно представить в виде

$$\left(x + O(x^2)\right)\theta y(x) + \left(-x + O(x^2)\right)y(x) = 0. \tag{17}$$

Применим процедуру к (17).

```
> eq1 := (x+O(x^2))*(theta(y(x),x,1))+(-x+O(x^2))*y(x);
```

$$eq1 \coloneqq \left(x + O(x^2)\right)\theta(y(x), x, 1) + \left(-x + O(x^2)\right)y(x)$$


```
> LaurentSolution(eq1, y(x));
```

$$[x\_c_1 + O(x^2)]$$

Итак, имеется только одно инвариантное усечение решения с валюацией $v = 1$ и степенью усечения $m = 1$.

2. Применим процедуру к (17) еще раз, задав желаемую степень усечения, равную 2, с помощью опции `'degree'=2`:

```
> LaurentSolution(eq1, y(x), 'degree'=2);
```

$$\left[x\_c_1 + x^2\left(-\_c_1 U_{[0,2]} - \_c_1 U_{[1,2]}\right) + O(x^3)\right]$$

Итак, коэффициент решения при степени 2 зависит от литералов, то есть различные продолжения уравнения $eq1$ могут иметь разные коэффициенты решения при этой степени и найденное ранее инвариантное решение является максимально возможным.

3. Добавим к коэффициентам уравнения $eq1$ некоторые члены, соответствующие коэффициентам (15). Получим усечение решения до степени x^2, которое соответствует разложению в степенной ряд функции $\sin x$, являющейся решением (15):

```
> eq2 := (x+O(x^3))*(theta(y(x),x,1))+(-x+x^3/2+O(x^4))*y(x);
```

$$eq2 \coloneqq \left(x + O(x^3)\right)\theta(y(x), x, 1) + \left(-x + \frac{x^3}{2} + O(x^4)\right)y(x)$$

```
> LaurentSolution(eq2, y(x));
```

$$[x\_c_1 + O(x^3)]$$

Снова $v = 1$, но $m = 2$. Легко проверить, что найденное усечение решения является продолжением инвариантного усечения решения уравнения $eq1$. При этом видно, что если подставить значения $U_{[0,2]} = 0$, $U_{[1,2]} = 0$, которые соответствуют добавленным коэффициентам, в найденное выше усечение решения уравнения $eq1$ до степени $m = 2$, то будет получено усечение решения уравнения $eq2$.

4. Теперь добавим к коэффициентам уравнения $eq1$ несколько членов, соответствующих коэффициентам (16). Получим усечение решения до степени x^2, которое соответствует разложению в степенной ряд функции $e^x - 1$, являющейся решением (16).

```
> eq3 := (x+x^2/2+O(x^3))*theta(y(x),x,1)+
         (-x-x^2-x^3/2+O(x^4))*y(x);
```

$$eq3 \coloneqq \left(x + \frac{x^2}{2} + O(x^3)\right)\theta(y(x), x, 1) + \left(-x - x^2 - \frac{x^3}{2} + O(x^4)\right)y(x)$$

```
> LaurentSolution(eq3, y(x));
```

$$\left[x\_c_1 + \frac{x^2\_c_1}{2} + O(x^3)\right]$$

Итак, $v = 1$, $m = 2$. Вновь легко проверить, что найденное усечение решения является продолжением усечения решения уравнения $eq1$. При этом видно, что если подставить значения $U_{[0,2]} = -1$, $U_{[1,2]} = \frac{1}{2}$, которые соответствуют добавленным коэффициентам, в усечение решения уравнения $eq1$ до степени 2, то будет получено усечение решения уравнения $eq3$.

Таким образом, различные продолжения $eq2$ и $eq3$ уравнения $eq1$ дали различные инвариантные усечения решений. При этом, как и ожидалось, не возникло новых решений, инвариантные усечения решений $eq2$ и $eq3$ являются продолжениями инвариантного усечения решения $eq1$ и соответствуют его продолжению до степени 2, зависящего от литералов, с подстановкой вместо литералов соответствующих коэффициентов из уравнений $eq2$ и $eq3$.

5. Для каждого из уравнений $eq1, eq2$ и $eq3$ существует только одно значение валюации, для которого лорановы решения существуют при любом продолжении уравнения. Рассмотрим применение процедуры к следующему уравнению:

```
> eq4 := (-1+x+O(x^2))*theta(y(x),x,2)+
         (-2+O(x^2))*theta(y(x),x,1)+
         (x+O(x^2))*y(x);
```

$$eq4 \coloneqq \left(-1+x+O(x^2)\right)\theta(y(x),x,2)+\left(-2+O(x^2)\right)\theta(y(x),x,1) + \left(x+O(x^2)\right)y(x)$$

```
> LaurentSolution(eq4, y(x));
```

$$\left[\_c_1+\frac{x\_c_1}{3}+O(x^2)\right]$$

Полученный ответ означает, что существует только одно инвариантное усечение решения, оно имеет валюацию $v=0$ и степень усечения $m=1$.

6. Применим процедуру к $eq4$ еще раз, задав степень усечения решения, равную 3, с помощью опции `'degree'=3`:

```
> LaurentSolution(eq4, y(x), 'degree'=3);
```

$$\left[\_c_1+\frac{x\_c_1}{3}+x^2\left(\frac{1}{12}\_c_1+\frac{1}{8}\_c_1U_{[0,2]}\right) + x^3\left(\frac{1}{45}\_c_1U_{[2,2]}+\frac{1}{36}\_c_1+\frac{23}{360}\_c_1U_{[0,2]}+\frac{1}{45}\_c_1U_{[1,2]}+\frac{1}{15}\_c_1U_{[0,3]}\right) + O(x^4)\right]$$

7. Добавим к коэффициентам уравнения $eq4$ несколько коэффициентов. Применим процедуру.

```
> eq5 := (-1+x+x^2+O(x^3))*theta(y(x),x,2)+
         (-2+O(x^3))*theta(y(x),x,1)+
         (x+6*x^2+O(x^4))*y(x);
```

$$eq5 \coloneqq \left(-1+x+x^2+O(x^3)\right)\theta(y(x),x,2)+\left(-2+O(x^3)\right)\theta(y(x),x,1) + \left(x+6x^2+O(x^4)\right)y(x)$$

```
> LaurentSolution(eq5, y(x));
```

$$\left[\frac{\_c_1}{x^2}-\frac{5\_c_1}{x}+\_c_2+O(x),\qquad \_c_1+\frac{x\_c_1}{3}+\frac{5x^2\_c_1}{6}+\frac{13x^3\_c_1}{30}+O(x^4)\right]$$

Полученный ответ означает, что существуют два инвариантных усечения решений: с валюацией $v_1=0$ и степенью усечения $m_1=3$, являющееся продолжением ранее найденного усечения решения для уравнения $eq4$, и второе с валюацией $v_2=-2$ и степенью усечения $m_2=0$, которое является новым.

8. Добавим к коэффициентам уравнения $eq4$ несколько коэффициентов иначе. Применим процедуру.

```
>eq6 := (-1+x+x^2+O(x^3))*theta(y(x),x,2)+
        (-2+x^2+O(x^3))*theta(y(x),x,1)+
        (x+6*x^2+O(x^4))*y(x);
```

$$eq6 \coloneqq \left(-1+x+x^2+O(x^3)\right)\theta(y(x),x,2)+\left(-2+x^2+O(x^3)\right)\theta(y(x),x,1) + \left(x+6x^2+O(x^4)\right)y(x)$$

```
> LaurentSolution(eq6, y(x));
```

$$\left[\_c_1+\frac{x\_c_1}{3}+\frac{5x^2\_c_1}{6}+\frac{41x^3\_c_1}{90}+O(x^4)\right]$$

Полученный ответ означает, что вновь существует только одно инвариантное усечение решения с валюацией $v=0$ и степенью усечения $m=3$, являющееся продолжением ранее найденного усечения решения для $eq4$.

Видно, что различные продолжения $eq5$ и $eq6$ уравнения $eq4$ дали различные инвариантные усечения. При этом у уравнения $eq5$ возникло новое решение с другой валюацией, при этом второе инвариантное усечение решения $eq5$ и инвариантное усечение решения $eq6$ являются продолжениями инвариантного усечения решения $eq4$ и соответствуют его продолжению до степени 3 в литералах с подстановкой вместо литералов соответствующих коэффициентов из уравнений $eq5$ и $eq6$.

9. Проверим, имеет ли смысл рассматривать случай различных $t_0, t_1, \dots, t_r$, входящих в (5), или же достаточно ограничиться случаем равенства этих чисел. Иными словами, проверим может ли замена в (5) каждого t_i на $t=\min_{i=0}^{r} t_i$ привести к снижению точности результата работы алгоритма.

Для следующего уравнения получаем пять начальных членов решения:

```
> eq7 := (1+O(x))*(theta(y(x),x,1))+(x^4+O(x^5))*y(x);
```

$$eq7 \coloneqq \left(1+O(x)\right)\theta(y(x),x,1)+\left(x^4+O(x^5)\right)y(x)$$

```
> LaurentSolution(eq7, y(x));
```

$$\left[\_c_1-\frac{\_c_1x^4}{4}+O(x^5)\right]$$

Если же взять $t_0=t_1=0$, то получим только один начальный член решения:

```
eq8 := (1+O(x))*(theta(y(x),x,1))+ O(x)*y(x);
```

$$eq8 \coloneqq \left(1+O(x)\right)\theta(y(x),x,1)+O(x)y(x)$$

```
LaurentSolution(eq8, y(x));
```

$$[\_c_1+O(x)]$$

Это показывает, что при замене каждого t_i на $t=\min_{i=0}^{r} t_i$ произошло снижение точности работы алгоритма. Тем самым, связанные с отказом от априорного предположения о равенстве всех t_i затраты времени могут быть не напрасными.

10. Существуют уравнения, которые не имеют нетривиальных лорановых решений ни при каких продолжениях:

```
> eq9 := (2+O(x))*(theta(y(x),x,1))+(1+O(x))*y(x);
```

$$eq9 \coloneqq \left(2+O(x)\right)\theta(y(x),x,1)+\left(1+O(x)\right)y(x)$$

```
> LaurentSolution(eq9, y(x));
```

$$[\,]$$

Ответ – пустой список – означает отсутствие решений для всех продолжений уравнения $eq9$.

11. Процедуру можно применять к уравнениям, заданным через оператор дифференцирования $\frac{d}{dx}$.

```
>eq10 := (-x+x^2+x^3+O(x^4))*(diff(y(x),x,x))+
         (-3+x+O(x^2))*(diff(y(x),x))+
         O(x^3)*y(x);
```

$$eq10 \coloneqq \left(-x+x^2+x^3+O(x^4)\right)\left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right)+\left(-3+x+O(x^2)\right)\left(\frac{d}{dx}y(x)\right) + O(x^3)y(x)$$

```
> LaurentSolution(eq10, y(x));
```

$$[\_c_1+O(x^4)]$$

В случае, если не выполнено условие (4), инвариантных усечений лорановых решений не существует. В этом случае процедура возвращает `FAIL`. Следующее уравнение задано через $\frac{d}{dx}$, процедура строит эквивалентное ему уравнение через θ и определяет, что условие (4) не выполнено, следовательно, инвариантных усеченных решений не существует:

```
> eq11 := (x^2+O(x^3))*diff(y(x),x,x)+
          O(x)*diff(y(x),x)+(1+O(x))*y(x);
```

$$eq11 := \left(x^2 + O(x^3)\right)\left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right) + O(x)\left(\frac{d}{dx}y(x)\right) + \left(1 + O(x)\right)y(x)$$

```
> LaurentSolution(eq11, y(x));
```

$$FAIL$$

5.3 Примеры построения регулярных решений

1. Применим процедуру поиска регулярных решений:

```
> eq12 := (-1+x+x^2+O(x^3))*theta(y(x),x,2)+
          (-2+O(x^2))*theta(y(x),x,1)+(O(x^4))*y(x);
```

$$eq12 := \left(-1 + x + x^2 + O(x^3)\right)\theta(y(x), x, 2) + \left(-2 + O(x^2)\right)y(x) + O(x^4)y(x)$$

```
> RegularSolution(eq12, y(x));
```

$$[\_c_1 + O(x^4)]$$

2. Добавим один дополнительный коэффициент $U_{[1,2]} = 1$ к уравнению $eq12$ и применим процедуру еще раз:

```
> eq13 := (-1+x+x^2+O(x^3))*theta(y(x),x,2)+
          (-2+x^2+O(x^3))*theta(y(x),x,1)+O(x^4)*y(x);
```

$$eq13 := \left(-1 + x + x^2 + O(x^3)\right)\theta(y(x), x, 2) + \left(-2 + x^2 + O(x^3)\right)\theta(y(x), x, 1) + O(x^4)y(x)$$

```
> RegularSolution(eq13, y(x));
```

$$\left[-\frac{\_c_1}{x^2} + \frac{4\_c_1}{x} + \_c_2 + O(x) + \ln(x)\left(\_c_1 + O(x^4)\right), \quad \_c_2 + O(x^4)\right]$$

Видим, что в этом случае возникает второе усечение регулярного решения, содержащее логарифм.

3. Применим процедуру к этому же уравнению с опцией представления результата в литералах:

```
> RegularSolution(eq13, y(x), 'output'='literal');
```

$$\ln(x)\left(\_c_1 + \frac{1}{24}x^4\_c_1U_{[0,4]} + O(x^5)\right) - \frac{\_c_1}{x^2} + \frac{4\_c_1}{x} + \_c_2 + x\left(\frac{2}{3}\_c_1U_{[1,3]} - \frac{4}{3}\_c_1U_{[2,3]}\right) + x^2\left(\frac{1}{4}\_c_1U_{[1,4]} - \frac{5}{12}\_c_1U_{[1,3]} + \frac{1}{3}\_c_1U_{[2,3]} - \frac{1}{2}\_c_1U_{[2,4]} - \frac{1}{8}\_c_{1_1}U_{[0,4]} + \frac{1}{8}\_c_1\right) + x^3\left(\frac{2}{15}\_c_1U_{[2,4]} - \frac{1}{5}\_c_1U_{[1,4]} + \frac{2}{45}\_c_1U_{[1,3]} - \frac{4}{45}\_c_1U_{[2,3]} + \frac{2}{15}\_c_1U_{[1,5]} + \frac{7}{30}\_c_1U_{[0,4]} + \frac{1}{30}\_c_1 - \frac{4}{15}\_c_1U_{[2,5]} - \frac{1}{15}\_c_1U_{[0,5]}\right)$$

$$+x^4\left(\frac{1}{24}\_c_1U_{[0,4]} - \frac{3}{40}\_c_1U_{[2,4]} + \frac{7}{240}\_c_1U_{[1,4]} - \frac{7}{80}\_c_1U_{[1,3]} + \frac{1}{20}\_c_1U_{[2.3]} - \frac{7}{60}\_c_1U_{[1.5]} + \frac{7}{180}\_c_1U_{[0,4]} + \frac{7}{160}\_c_1 + \frac{1}{15}\_c_1U_{[2,5]} + \frac{17}{120}\_c_1U_{[0,5]} + \frac{1}{36}\_c_1{U_{[1,3]}}^2 - \frac{1}{36}U_{[1,3]}\_c_1U_{[2,3]} - \frac{1}{18}\_c_1{U_{[2,3]}}^2 - \frac{1}{24}\_c_1U_{[0,6]} + \frac{1}{12}\_c_1U_{[1,6]} - \frac{1}{6}\_c_1U_{[2,6]}\right) + O(x^5)$$

4. Применим процедуру к этому же уравнению одновременно с опцией задания степени усечения:

```
> RegularSolution(eq13, y(x), 'degree'=2);
```

$$\left[-\frac{\_c_1}{x^2} + \frac{4\_c_1}{x} + \_c_2 + x\left(\frac{2}{3}\_c_1U_{[1,3]} - \frac{4}{3}\_c_1U_{[2,3]}\right) + x^2\left(\frac{1}{4}\_c_1U_{[1,4]} - \frac{5}{12}\_c_1U_{[1,3]} + \frac{1}{3}\_c_1U_{[2,3]} - \frac{1}{8}\_c_1U_{[0,4]} - \frac{1}{2}\_c_1U_{[2,4]} + \frac{1}{8}\_c_1\right) + O(x^3) + \ln(x)\left(\_c_1 + O(x^3)\right), \quad \left(\_c_2 + O(x^3)\right)\right]$$

Ответ показывает, что для получения 2-усечения как продолжения инвариантного усечения необходимо задать $U_{[0,4]}$, $U_{[1,3]}$, $U_{[1,4]}$, $U_{[2,3]}$, $U_{[2,4]}$, т.е. коэффициенты уравнения при x^4, $x^3\theta$, $x^4\theta$, $x^3\theta^2$, $x^4\theta^2$ соответственно.

5. Применим процедуру к этому же уравнению одновременно с опцией представления результата в литералах и опцией задания степени усечения, опции могут использоваться совместно:

```
> RegularSolution(eq13, y(x),'output'='literal', 'degree'=2);
```

$$\ln(x)\left(\_c_1 + O(x^3)\right) - \frac{\_c_1}{x^2} + \frac{4\_c_1}{x} + \_c_2 + x\left(\frac{2}{3}\_c_1U_{[1,3]} - \frac{4}{3}\_c_1U_{[2,3]}\right) + x^2\left(\frac{1}{4}\_c_1U_{[1,4]} - \frac{5}{12}\_c_1U_{[1,3]} + \frac{1}{3}\_c_1U_{[2,3]} - \frac{1}{2}\_c_1U_{[2,4]} - \frac{1}{8}\_c_1U_{[0,4]} + \frac{1}{8}\_c_1\right) + O(x^3)$$

6. Добавим к уравнению $eq12$ один коэффициент иначе: $U_{[1,2]} = 0$.

```
> eq14 := (-1+x+x^2+O(x^3))*theta(y(x),x,2)+
          (-2+O(x^3))*theta(y(x),x,1)+
          O(x^4)*y(x);
```

$$eq14 := \left(-1 + x + x^2 + O(x^3)\right)\theta(y(x), x, 2) + \left(-2 + O(x^3)\right)\theta(y(x), x, 1) + O(x^4)y(x)$$

```
> RegularSolution(eq14, y(x));
```

$$\left[\frac{\_c_1}{x^2} - \frac{4\_c_1}{x} + \_c_2 + O(x), \quad \_c_2 + O(x^4)\right]$$

Видим, что в этом случае возникает новое инвариантное регулярное решение – лораново решение с валюацией $v_2 = -2$.

7. Применим процедуру к следующему уравнению

```
> eq15 := (1+x^2+O(x^3))*theta(y(x),x,3)+
          (4-x+(1/2)*x^2+O(x^3))*theta((y(x),x,2))+
          4-2*x+x^2+O(x^3))*theta(y(x),x,1+
          O(x^3)*y(x);
```

$$eq15 := \left(1+x^2+O(x^3)\right)\theta(y(x),x,3)+\left(4-x+\frac{1}{2}x^2+O(x^3)\right)\theta(y(x),x,2) + \left(4-2x+x^2+O(x^3)\right)\theta(y(x),x,1)+O(x^3)y(x)$$

```
> RegularSolution(eq15, y(x));
```

$$\left[\frac{\frac{21\_c_1}{16}+\frac{\_c_2}{2}}{x^2}+\frac{\_c_1}{x}+\_c_3+O(x)+\ln(x)\left(\frac{1}{2}\frac{\_c_1}{x^2}+\_c_2+O(x)\right) + \ln(x)^2\left(\frac{1}{2}\_c_1+O(x^3)\right),\ \frac{1}{2}\frac{\_c_2}{x^2}+\_c_3+O(x)+\ln(x)\left(\_c_2+O(x^3)\right), \_c_3+O(x^3)\right]$$

В данном случае существует три различных инвариантных усечения регулярных решений, содержащиеся в них ряды усечены до разных степеней, логарифм входит до степени $k=2$.

8. Уравнение

```
> eq16 := (-1+x+O(x^3))*theta(y(x),x,2)+
          (-1-x-(3/2)*x^2+O(x^3))*theta(y(x),x,1)+
          (3/4+(1/4)*x+ (3/4)*x^2+O(x^3))*y(x);
```

$$eq16 := \left(-1+x+O(x^3)\right)\theta(y(x),x,2) + \left(-1-x+\frac{3}{2}x^2+O(x^3)\right)\theta(y(x),x,1) + \left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}x^2+O(x^3)\right)y(x)$$

```
> RegularSolution(eq16, y(x));
```

$$\left[\sqrt{x}\left(-\frac{2\_c_1}{x^2}+\frac{8\_c_1}{x}+\_c_2+O(x)+\ln(x)\left(\_c_1+O(x^3)\right)\right),\qquad \sqrt{x}\left(\_c_2+O(x^3)\right)\right]$$

В данном случае получено регулярное решение с нецелым λ в множителе x^λ.

9. Еще одно уравнение:

```
> eq17 := (1+O(x^2))*theta(y(x),x,3)+
          (1+2*x+O(x^2))*theta(y(x),x,2)+
          (2+x+O(x^2))*theta(y(x),x,1)+
          (2-x+O(x^2))*y(x);
```

$$eq17 := \left(1+O(x^2)\right)\theta(y(x),x,3)+\left(1+2x+O(x^2)\right)\theta(y(x),x,2)+ \left(2+x+O(x^2)\right)\theta(y(x),x,1)+\left(2-x+O(x^2)\right)y(x)$$

```
> RegularSolution(eq17, y(x));
```

$$\left[\frac{\_c_1}{x}+O(x)+x^{\mathrm{RootOf}(\_Z^2+2,index=1)}\left(\_c_2-\frac{1}{54}x\left(20+23\mathrm{RootOf}(\_Z^2+2,index=1)\right)\_c_2 + O(x^2)\right) + x^{\mathrm{RootOf}(\_Z^2+2,index=2)}\left(\_c_3 - \frac{1}{54}x\left(20+23\mathrm{RootOf}(\_Z^2+2,index=2)\right)\_c_3+O(x^2)\right)\right]$$

В данном случае все продолжения уравнения имеют три неэквивалентных степенных множителя, с показателями -1, $\sqrt{-2},-\sqrt{-2}$, где $\sqrt{-2},-\sqrt{-2}$ представлены конструкциями $\mathrm{RootOf}(\_Z^2+2, index=1)$ и $\mathrm{RootOf}(\_Z^2+2, index=2)$.

10. Уравнение, заданное через оператор дифференцирования $\frac{d}{dx}$:

```
> eq18 := (-x+x^2+x^3+O(x^4))*(diff(y(x),x,x))+
          (-3+x+2*x^2+O(x^3))*(diff(y(x),x))+
          O(x^3)*y(x)
```

$$eq18 := \left(-x+x^2+x^3+O(x^4)\right)\left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right) + \left(-3+x+2x^2+O(x^3)\right)\left(\frac{d}{dx}y(x)\right)+O(x^3)y(x)$$

```
> RegularSolution(eq18, y(x));
```

$$\left[-\frac{\_c_1}{x^2}+\frac{4\_c_1}{x}+\_c_2+O(x)+\ln(x)\left(\_c_1+O(x^4)\right),\qquad \_c_2+O(x^4)\right]$$

В результате перехода к уравнению, записанному с помощью θ, процедура получает уравнение $eq13$. Поэтому совпадают результаты вычислений.

Список литературы / References

[1]. Абрамов С.А., Рябенко А.А., Хмельнов Д.Е. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения и усеченные ряды. Журнал вычислительной математики и математической физики, том 59, № 10, 2019, стр. 66–-77 / Abramov S.A., Ryabenko A.A., Khmelnov D.E. Linear ordinary differential equations and truncated series. Computational Mathematics and Mathematical Physics, vol. 59, № 10, 2019.

[2]. Абрамов С.А., Рябенко А.А., Хмельнов Д.Е. Регулярные решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений и усеченные ряды. Журнал вычислительной математики и математической физики, том 60, № 1, 2020 / Abramov S.A., Ryabenko A.A., Khmelnov D.E. Regular solutions of linear ordinary differential equations and truncated series. Computational Mathematics and Mathematical Physics, vol. 60, № 1, 2020.

[3]. Moulay Barkatou, Eckhard Pflügel. An algorithm computing the regular formal solutions of a system of linear differential equations. Journal of Symbolic Computation. vol. 28, issues 4–5, 1999, pp. 569-587.

[4]. Sergei A. Abramov, Manuel Bronstein, Marko Petkovšek. On polynomial solutions of linear operator equations. In Proc. of the 1995 international symposium on Symbolic and algebraic computation. 1995, pp. 290-296.

[5]. Ferdinand Georg Frobenius. Integration der linearen Differentialgleichungen mit verânder Koefficienten. Journal für die reine und angewandte Mathematik, vol.76, 1873, pp. 214-235.

[6]. Lothar Heffter. Einleitung in Die Theorie Der Linearen Differentialgleichungen Mit Einer Unabhängigen Variablen. Teubner, Leipzig, 1894, 283 p.

[7]. Évelyne Tournier. Solutions formelles d'équations différentielles. Le logiciel de calcul formel DESIR, Étude théorique et realization. Thèse d'État, Université I de Grenoble, 1987.

[8]. Eckhard Pflügel. DESIR-II. RT 154, IMAG Grenoble. 1996.

[9]. Abramov S., Bronstein M., Khmelnov D. On regular and logarithmic solutions of ordinary linear differential systems. Lecture Notes in Computer Science, vol. 3718, 2005, pp. 1-12.

[10]. Abramov S.A., Barkatou M.A., Pfluegel E. Higher-order linear differential systems with truncated coefficients. Lecture Notes in Computer Science, vol. 6885, 2011, pp. 10-24.

[11]. Abramov S.A., Barkatou M.A. Computable Infinite Power Series in the Role of Coefficients of Linear Differential Systems. Lecture Notes in Computer Science, vol. 8660, 2014, pp. 1-12.

[12]. Abramov S.A., Khmelnov D.E. Regular solutions of linear differential systems with power series coefficients. Programming and Computer Software, vol. 40, issue 2, 2014, pp. 98–10.

[13]. Abramov S.A., Ryabenko A.A., Khmelnov D.E. Procedures for searching local solutions of linear differential systems with infinite power series in the role of coefficients. Programming and Computer Software, vol. 42, issue 2, 2016, pp. 55–64.

[14]. Maple online, available at: http://www.maplesoft.com/support/help/.

Информация об авторах / Information about authors

Сергей Александрович АБРАМОВ, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник. Научные интересы: компьютерная алгебра; символьные вычисления; символьное суммирование; линейные обыкновенные дифференциальные уравнения; линейные (q-)разностные уравнения; доказательство тождеств.

Sergey Alexandrovich ABRAMOV, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Chief Researcher. Research interests: computer algebra; symbolic calculations; symbolic summation; linear ordinary differential equations; linear (q-) difference equations; proof of identities.

Анна Андреевна РЯБЕНКО, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник. Научные интересы: компьютерная алгебра; символьные вычисления; линейные обыкновенных дифференциальные и разностные уравнения и их системы.

Anna Andreevna RYABENKO, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Researcher. Research interests: computer algebra; symbolic calculations; linear differential and difference equations and systems, summation problems.

Денис Евгеньевич ХМЕЛЬНОВ, кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник. Научные интересы: компьютерная алгебра; символьные вычисления; особые точки систем линейных обыкновенны дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами

Denis Evgenevich KHMELNOV, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Junior Researcher. Research interests: computer algebra; symbolic calculations; singular points of linear differential systems with polynomial coefficients.