

DOI: 10.15514/ISPRAS-2020-32(6)-13



Моделирование технических и математических задач прикладных областей знаний на ЭВМ

^{1,2} Е.М. Лаврищева, ORCID: 0000-0002-1160-1077 <lavr@ispras.ru>² И.Б. Петров, ORCID: 0000-0003-3978-9072 <petrov@mipt.ru>¹ Институт системного программирования им. В.П. Иванникова РАН,
109004, Россия, г. Москва, ул. А. Солженицына, д. 25² Московский физико-технический институт,
141701, Россия, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9

Аннотация. Рассмотрено моделирование технических задач и задач прикладной математики, их алгоритмизация и программирование. Дается характеристика численного моделирования технических задач и прикладной математики: физико-технических экспериментов, энергетических, баллистических и сейсмических методов И.В. Курчатова, начиная с математических методов 17-20 вв., первых ЭВМ и компьютеров. Дан анализ первых технических задач и задач прикладной математики, их моделирование, алгоритмизация и программирование с помощью граф-схемного языка А.А. Ляпунова, адресного языка и языков программирования. Представлены численные методы, реализованные под руководством А.А. Дородницына, А.А. Самарского, О.М. Белоцерковского и других ученых на современных суперкомпьютерах. Приведены примеры математического моделирования биологической задачи лечения глаз и предмета «Вычислительной геометрии» в Интернет.

Ключевые слова: математика; модель; моделирование; алгоритм; граф; области знаний; биология; геометрия

Для цитирования: Лаврищева Е.М., Петров И.Б. Моделирование технических средств и задач прикладной математики на ЭВМ. Труды ИСП РАН, том 32, вып. 6, 2020 г., стр. 167-182. DOI: 10.15514/ISPRAS-2020-32(6)-13

Благодарности: Работа поддержана грантом РФФИ № 19-01-00206.

Modeling Technical and Mathematical Tasks of Applied Knowledge Areas on Computers

^{1,2} E.M. Lavrisheva, ORCID: 0000-0002-1160-1077 <lavr@ispras.ru>² I.B. Petrov, ORCID: 0000-0003-3978-9072 <petrov@mipt.ru>¹ Ivannikov Institute for System Programming of the Russian Academy of Sciences,
25, Alexander Solzhenitsyn st., Moscow, 109004, Russia,² Moscow Institute of Physics and Technology (MIPT)
141700, Russia, Moscow region, Dolgoprudny, Campus per., 9

Abstract. The paper considers modeling of technical problems and problems of applied mathematics, their algorithms and programming. The characteristics of the numerical modeling of technical problems and applied mathematics are given: physical and technical experiments, energy, ballistic and seismic methods of I.V. Kurchatov, starting with mathematical methods of the 17-20th centuries, the first computers and computers. The analysis of the first technical problems and problems of applied mathematics, their modeling, algorithmization and programming using the A.A. Lyapunov graph-schematic language, address language and programming languages is given. Numerical methods are presented, implemented under the guidance of A.A. Dorodnitsyn, A.A. Samarsky, O.M. Belotserkovsky and other scientists on modern supercomputers. Examples

167

of mathematical modeling of the biological problem of eye treatment and the subject of «Computational geometry» on the Internet are given.

Keywords: mathematics; model; modeling; algorithm; graph; knowledge areas; biology; geometry.

For citation: Lavrisheva E.M., Petrov I.B. Modeling of technical means and problems of applied mathematics on computers. Trudy ISP RAN/Proc. ISP RAS, vol. 32, issue 6, 2020, pp. 167-182 (in Russian). DOI: 10.15514/ISPRAS-2020-32(6)-13

Acknowledgements. This work was supported by the RFBR grant No. 19-01-00206.

1. Введение. Становление моделирования техники и математики

1.1 Моделирование технических средств

Моделирование в технике используется уже сотни лет в строительстве зданий, мостов, кораблей и др. Техническая модель отражала структурную сущность внешности технического предмета или явления и связей отдельных его элементов.

Значительный подъем исследований по прикладной математике в СССР произошел после окончания ВОВ 1945 года по следующим направлениям развития:

- передовые системы вооружений, обусловленные начавшейся гонкой вооружений между СССР и США;
- ядерные программы, требовавшие проведения многочисленных численных расчетных работ;
- ракетостроение, требующее проведения сложных аэродинамических, баллистических и прочностных численных расчетов;
- электронная техника, системы радиосвязи;
- физические методы разведки нефти и газа и методы их добычи в нашей стране.

Создание передовых систем вооружений началось в рамках ВПК, начиная с 1945 г. Министерство радиопромышленности СССР создало программу развития радиотехнических и радиофизических приборов с обеспечением высокого качества и безопасности. В рамках ВПК создавались специализированные приборы и устройства радиотехнического, радиолокационного, авиационного, космического назначения. Так, в 1960 году в космос полетел Ю.А. Гагарин, и весь мир был поражен уровнем достижений нашей науки и техники. В этот период (МНИИПА, Липаев В.В.) было создано более 100 средств вычислительной техники (ВТ), специализированные ЭВМ (ПРА-6.0, МАПА, АРГОН, АОУ6 и др.), а также радиолокационная техника для наведения и слежения за движением военных самолетов, подводных лодок, кораблей и др. Кроме того, под руководством Липаева В.В. были созданы программные комплексы ПРОТВА, ЯУЗА, РУЗА, ПРОМЕТЕЙ для реализации военных задач [1].

1.2. Моделирование задач прикладной математики

Первые сведения по прикладной математике относятся к XVII в. Развитие небесной механики и геодезии в связи с потребностями навигации и мореплавания, составление таблиц тригонометрических функций, появление артиллерии диктовали необходимость разработок расчетных методов. В это время появляется важнейший математический аппарат для решения многих прикладных задач – интегральное и дифференциальное исчисление, разработанное И. Ньютоном и Г. Лейбницем. Для решения дифференциальных и интегральных уравнений были разработаны приближенные, численные методы Эйлера решения задачи Коши обыкновенных дифференциальных уравнений и численного интегрирования. В связи с развитием небесной механики (Лапласом) и механики сплошных сред появилась методы решения уравнений в частных производных и численного решения

систем линейных и нелинейных алгебраических уравнений (Ньютон, Якоби, Гаусс–Зейдель, Лежандр, Эрмит и др.).

Важную роль в развитии теории приближенных вычислений – одной из основных теорий и в функциональном анализе, и в вычислительной математике, сыграли работы П.Л. Чебышева (чебышевская система функций, чебышевские многочлены, теория равномерных приближений и др.). В начале прошлого столетия получили развитие численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений (работы Галеркина, Рунге, Крылова, Кутты, Розенберга, Ван дер Поля, Адамса, Бутчера и др.), что позволило получить численные решения многих прикладных задач.

В XIX в. в прикладной математике появились нелинейные разностные отображения, заложившие основы теории нелинейных процессов. В начале XX в. возникала теория уравнений Максвелла, описывающая электрические и электромагнитные поля во времени и пространстве, а также появились методы решения систем уравнений механики сплошных сред. Существовавшие в то время простейшие численные приборы и арифмометры позволяли решать математические задачи, задавая цепочки последовательных расчетных алгоритмических действий в соответствии с алгоритмом Аль-Хорезми. Численные расчеты проводились на аналитических машинах.

2. Методы моделирования и программирования технических и математических задач на ЭВМ

2.1. Моделирование математических задач энергетики, баллистики и геофизики

Ядерные бомбардировки Хирасимо и Нагасаки в августе 1945 года послужили стимулом для ускоренного создания в нашей стране под руководством И.В. Курчатова атомной энергетики и проведения многочисленных численных расчетов, связанных с распадом ядерного урана и плутония, для ядерной бомбы. Была создана теория цепной реакции распада урана, и сформировались математические методы ядерной энергетики. Это привело к созданию в стране новых энергетических и технических устройств и атомной бомбы в 1949 году. Кроме того, были созданы первые в мире АЭС (1954 г.) и атомный ледокол «Ленин» (1957 г.).

Моделирование теоретических методов в энергетике и баллистике активно начали проводить в связи с появлением первого отечественного компьютера МЭСМ, созданного коллективом лаборатории Института электротехники АН УССР под руководством С.А. Лебедева (1948-1951). На МЭСМ под руководством академика М.В. Келдыша реализовывались математические задачи внешней баллистики, электрические и технические задачи:

- составление таблиц для статистического приемочного контроля задач баллистики;
- динамика в теории упругости;
- обеспечения устойчивости энергосистем (Куйбышевская ГЭС);
- расчета тепловых напряжений строительных конструкций;
- выбор оптимальных параметров шахтных канатов;
- геодезические задачи, оценка объемов земляных работ автодорог (и БАМ).

Алгоритмы таких задач разрабатывались путем декомпозиции математической задачи на отдельные элементарные функции и их описание средствами математической логики, граф-схемного языка А.А. Ляпунова или адресного языка В.С. Королюка и Е.Л. Ющенко (1955). Алгоритмы некоторых математических задач представлялись в виде стандартных математических подпрограмм в Библиотеках программ первых ЭВМ. Например, метод Адамса-Штермера/Дирихле был реализован В.М. Глушковым путем декомпозиции на отдельные элементарные математические операции, отработан на МЭСМ и оформлен в виде

стандартной подпрограммы [2]. Первая система загрузки для библиотек стандартных математических подпрограмм ИС-2 для М20 была создана в ИПМ [3].

Моделирование задач прикладной математики для решения на первых ЭВМ проводилось с использованием теории граф-схемного языка А.А. Ляпунова (1955). В этом языке делалось описание математических элементов задачи с помощью математических операций, формальных логических символов и операторов по ориентированному графу переходов с одной входной и одной выходной вершиной [4, стр. 226-253]. Граф задавал структуру алгоритма, в которой одна вершина – преобразователь и две вершины – распознаватели. Две граф-схемные программы функционально эквивалентны, если для любой интерпретации соответствующие программы вычисляют одинаковые функции. Каждому выполнению программы сопоставляется протокол порядка следования базовых операций. Если известны значения истинности предикатов, входящих в программу, то протокол строится однозначно и не требует интерпретации операций. Если выбор значения истинности предикатов произвольный, то для схемы программы создается некоторое множество протоколов, называемое *детерминантом*. С учетом этого понятия, доказывается эквивалентность двух граф-схем, если их детерминанты совпадают. Формальная эквивалентность корректна, если из нее следует функциональная эквивалентность. Детерминант описывается формальным языком, который воспринимается некоторым конечным автоматом. При этом формальная эквивалентность разрешима и совпадает с функциональной. Существенное место в теории граф-схемного программирования занимает перевод граф-схем из одной модели в другую. Проблемы разрешимости соответствующей формальной эквивалентности развивались в работах Р.И. Подловченко и С.С. Лаврова [5].

2.2. Моделирование математических задач сохранения энергии, зарядов и частиц

Основы вычислительных методов решения уравнений в частных производных были определены математиками А.Н. Тихоновым, А.А. Самарским, В.С. Рябенским, американскими учеными Р. Курантом, П. Лаксом и др. Были введены фундаментальные понятия теории разностных схем: сходимость, аппроксимация, устойчивость, доказана базовая теорема эквивалентности. Под руководством академика А.А. Самарского проводилось моделирование задач прикладной математики согласно сформировавшейся концептуальной модели предметной области знаний: $KM = \langle X, R, F \rangle$, где

X – конечное множество понятий предметной области;

R – конечное множество сущностных отношений (связей) между понятиями предметной области;

F – конечное множество функциональных алгоритмов задач предметной области.

КМ-модель задает информацию о понятиях предметной области в виде сущностных понятий, которые сохраняются в тезаурусе с возможными связями между ними. Функциональная (техническая) задача формулируется в рамках теории предметной области, в которой математическая модель сочетается с общематематическим знанием, задающим эту модель. Алгоритмизация модели состоит в отображении точного знания о задаче и операциях над ее элементами в описании алгоритма программы для компьютера.

Модели программ разрабатывались для решения математических, физических и технических задач вначале на аналитических машинах и потом на ЭВМ [6]. Были разработаны математические модели на основе закона сохранения энергии, импульсов, зарядов и частиц, уравнений механики сплошных сред, электродинамики Максвелла, уравнений Больцмана для разреженного газа, кванто-механического уравнения Шредингера и др.

Появились и другие математические задачи в классах климатических, космических, геофизических, сейсмических, термодинамических, радиолокационных, акустических, медицинских, биологических, химических и физических задач. Каждый из указанных

разделов науки имеет «численную» часть, поэтому появились науки – вычислительная математика, численные методы, высокопроизводительные вычисления, информационные и интеллектуальные средства [7, 8].

2.3. Моделирование физических задач и механики сплошных сред

Проведение вычислительного эксперимента О.М.Белоцерковским и С.К. Годуновым проводилось с помощью математической модели физического эксперимента, включающей характерные свойства физического явления, алгоритма свойств и характеристик этого явления в виде простых формул и операций программы численного решения задач (математической физики, нелинейной механики и др.) на ЭВМ. Одной из первых вычислительных задач была задача о ядерном взрыве и об обтекании затупленных тел потоком сверхзвукового газа. Исследование физических объектов проводилось путем анализа и выбора схемы эксперимента, определение элементов конструкции устройства. Затем составлялась разностная схема и проверка ее устойчивости. В результате получалось экспериментальное средство, которое обрабатывалось на серии экспериментов и проверки их правильности. Глубокое проникновение в механику сплошных сред привело к использованию интегральных и дифференциальных уравнений для описания происходящих явлений.

При математическом моделировании задач по этим уравнениям создавалась приближенная модель, которая отражала характерные свойства данного физического явления. С помощью компьютеров проводилось моделирование сложных технических и природных систем [9].

Разработка рациональных численных моделей вычислений привела к применению интеллектуальных гибридных *экспертных систем*, позволяющих прогнозировать поведение объектов и процессов. Экспертные системы являются инструментом распознавания образов и проведения систематических исследований вычислительных средств и формальных средств описаний ситуаций объектов. Система *распознавания* образов позволяет определить агрегированную оценку ситуаций, исходя из их формального описания. При установлении соответствия между классами эквивалентности, заданной на множестве решений и объектов, процедура распознавания ситуаций становится элементом автоматизации процесса принятия решений. Минимальное отклонение процесса управления от требуемого может возникнуть из-за изменения внешних условий и поэтому требуется прогнозировать изменения внешней среды с учетом временных интервалов. Проблемы *интеллектуализации* экспертных систем переносятся на решение задачи поиска динамических инвариантов для соответствующих классов эволюционных задач. При моделировании численных задач в механике сплошных сред реализованы методы дискретных вихрей, метод Монте-Карло, метод неопределенных коэффициентов стационарных методов и метода расщепления физических процессов с сильно изменяющимися границами области интегрирования [8, 10].

2.4. Теория графов для моделирования задач техники и математики

Первая работа по теории графов была опубликована Эйлером в 1736 г. в статье про строительство Кенигсбергских мостов. В течение почти ста лет эта теория почти не использовалась. Интерес к теории графов возродился около середины XIX в связи с развитием естественных наук (электрических сетей, моделей кристаллов, структур молекул и др.) и формальной математической логики. Кроме того, оказалось, что решения многих математических головоломок, интеллектуализация шахматных задач формулировались в терминах теории графов. Последние 50 лет ознаменовались новыми интенсивными разработками теории графов в атомной энергетике, нейронных, нанобиологических, генетических, геофизических, космических задачах, а также в предметных областях знаний: физический эксперимент Коллайдер, Ядерный реактор, компьютерные, информационные, телекоммуникационные, экономические и бизнес-задачи.

Теория графов в программировании начала развиваться в школе А.П. Ершова (Касьянов В.И, Иткин В.Э., Евстигнеев А.А. и др.) [4, 11, 12]. Эта теория активно развивается в компьютерных науках и системах при их моделировании в виде графовой теории моделирования прикладных областей знаний [13-17]. Математический аппарат индентности и смежности используется для доказательства графовых, нейрографовых структур и др. [13-21]. Графовые структуры используются при реализации задач в биологии, медицине, физических экспериментах коллайдера, ядерного реактора и др. В ИСП РАН графовая теория применялась для моделирования вариантов OS Linux [15], средств защиты сложных компьютерных систем от разрушений и обеспечения надежности и безопасности функционирования программных систем [13-18] и др.

3. Численные методы моделирования прикладных задач на современных ЭВМ

3.1. Численные методы решения сложных задач

В 60–80-х гг. XX в. получили развитие итерационные методы, методы решения уравнений в частных производных эллиптического типа, методы решения задач в механике сплошных сред (Р.П. Федоренко, В.П. Колгана, Ван Лира, А. Хартена (TVD-схемы), Б.Н. Четверушкина, А. С. Холодова, С. Ошера, Ч.-В. Шу, И.Б. Петрова [22-24]). Численные методы высокого порядка точности были предложены в работах В. В. Русанова, С. Бурштейна, У. Риды, Т. Хилла (разрывный метод Галеркина), Э.Ф. Торо, А.И. Толстых. При численном решении многих практически важных задач используются методы конечных элементов, основанных на вариационных методах Галеркина и Ритца, в консервативных схемах, в задачах газодинамики, физики плазмы, магнитной гидродинамики, теории упругости и др. [25]. Многие из приведенных методов разработаны в Институте прикладной математики РАН, в Институте вычислительной математики РАН, Вычислительном центре РАН и др.

3.3. Применение графических плат GPU для решения математических задач

Инструментарий CUDA использует графические платы GPU для решения задач, описываемых уравнениями математической физики. Такие платы получили название GPGPU (general purpose computing on graphics processing units). Применение GPGPU связано с тем, что графических платы создавались для визуализации, которая не зависит от работы вычислительных ядер. Одним из путей выхода из этой ситуации является использование гибридных (гетерогенных) узлов, в которых соединены процессоры общего назначения GPU и GPGPU. В этой комбинации процессоры общего назначения берут на себя выполнение сложных логических операций, а GPGPU ведут обработку большого количества однородных потоков информации. Как показывает современная практика, такие гибридные суперкомпьютеры обладают при пиковой производительности приблизительно на порядок меньшую стоимость и энергопотребление, чем системы одинаковой производительности на основе процессоров общего назначения.

В комбинации с процессорами общего назначения использование графических плат сталкивается с серьезными трудностями. Задача состоит в создании алгоритмов, требующих переработки больших массивов информации типа Big Data. В настоящее время особую важность приобретают такие направления, как аэромеханика летательных аппаратов, прочность и надежность аэрокосмической техники, проектирование композиционных покрытий [26], безопасность железных дорог, сейсмостойкость объектов атомной энергетики, глобальная сейсмика [27], задачи, связанные с освоением запасов нефти и газа в условиях Севера и Арктики (безопасность и устойчивость ледостойких платформ, нефтегазопроводов, ледоколов и судов ледового класса, миграция крупных ледовых

образований) [28]. Важнейшей проблемой, решаемой с помощью высокопроизводительных вычислительных систем, является сейсмо- и электроразведка углеводородов, особенно в шельфовых зонах российских северных морей (прямые и обратные задачи георазведки). Суперкомпьютерное моделирование также позволяет моделировать процессы, происходящие при операциях, травмах и других процессах в медицинской практике и в биологических объектах [29-30].

3.4. Программные методы решения физико-технических задач

Для численного решения сложных физических задач, например, климатических задач, задач физики плазмы, электромагнитных полей, основанных на интегро-интерполяционных, сеточно-характеристических и вариационных методах в многопроцессорных системах используются различные подходы и большой набор инструментов, например: Nast ran; ProCAS; Logoc; Wolfarm Mathematics; Anasys 3D; Ansis Maxwell; Fluid Dynamics; Flow vision; Tesseral PRO; Abaqus; Madagaskar; Open Foam; Fierdrake; Matlab; Mathematics; Maple; MathCAD. Для проведения анализа больших данных используется метод графового моделирования, описанный в [31].

Далее приводится описание метода моделирование биологических процессов лечения сетчатки глаза и вычислительной геометрии с использованием современных сервисных и компонентных моделей SOA, SCA WWW3C.

4. Численное моделирование динамических процессов в биологии

В работе [32] описана теория моделирования метода механики сплошной среды применительно в задаче лечения катаракты глаза. Катаракта – это заболевание глаз человека, связанное с помутнением хрусталика. Единственным способом его лечения является удаление хрусталика. Различают интракапсулярное и экстракапсулярное удаление катаракты. В первом случае хрусталик удаляют вместе с капсулой, в которой он находится, а при втором удаляют только хрусталик, а капсула остается в глазу. Среди экстракапсулярных методик наиболее прогрессивной является лазерная экстракция катаракты. Для ее проведения в глаз вводится игла с расположенным в ней оптоволоконном.

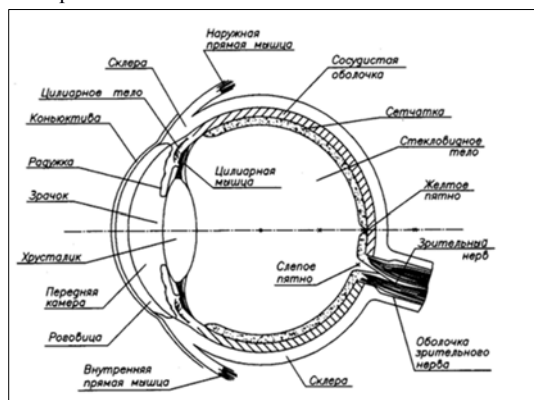


Рис.1. Схема строения глаза человека
Fig. 1. Scheme of the structure of the human eye

При диаметре прокола менее 3 мм можно обойтись без наложения швов. В этом случае могут возникнуть побочные явления и послеоперационных осложнений. Во время лазерного излучения выделяется тепло, воздействующее на роговицу. Кроме того, происходит быстрое расширение хрусталика, имеющее характер микроразрыва. Это приводит к появлению

возмущений в биосреде глаза, распространяющихся к его границам, в частности, к сетчатке, что делает ее зоной риска. Далее кратко описана технология проведения хирургической операции на глазу, схема которого приведена на рис.1.

Глаз имеет не совсем правильную шаровидную форму. Длина его сагиттальной оси в среднем равна 24 мм, горизонтальной – 23,6, вертикальной – 23,3 мм. Глазное яблоко состоит из трех оболочек: наружной, или фибриозной; средней, или сосудистой; внутренней, или сетчатки. Наружная оболочка достаточно тонкая (0,3 – 1 мм), но плотная. Она определяет форму глаза, выполняет защитную функцию места крепления глазодвигательных мышц. Фибриозная оболочка подразделяется на два неравных отдела – роговицу и склеру.

Внутреннее ядро глаза состоит из прозрачных светопреломляющих сред: стекловидного тела, хрусталика и водянистой влаги, наполняющей глазные камеры (передняя – от роговицы до радужки, задняя – от радужки до цилиарного тела). Водянистая влага представляет собой прозрачную жидкость плотностью 1,005–1,007 с показателем преломления 1,33. Количество влаги у человека не превышает 0,2–0,5 мл. Вырабатываемая цилиарным телом водянистая влага содержит соли, аскорбиновую кислоту, микроэлементы. Хрусталик состоит из хрусталиковых волокон, составляющих вещество хрусталика, и сумки-капсулы. Диаметр хрусталика 9–10 мм. Переднезадний размер – 3,5 мм. Стекловидное тело заполняет полость глазного яблока, за исключением передней и задней камер глаза, и таким образом способствует сохранению его формы [28-29].

Объем стекловидного тела взрослого человека 4 мл. Оно состоит из плотного остова и жидкости, причем на долю воды приходится около 99% всего состава стекловидного тела. Физически стекловидное тело представляет собой прозрачный гель, состоящий из внеклеточной жидкости с коллагеном и гиалуровой кислотой в коллоидном растворе.

Частота импульсов лазера – 10 Гц, а сам импульс представляет собой цуг длительностью 250 мкс. с модулированной добротностью. Период микроимпульсов в цуге составляет 12,5 мкс, а длительность микроимпульса – 3 мкс. Обсчитывались только первые 250 мкс, поскольку полный расчет одного лазерного импульса потребовал бы сделать $2 \cdot 10^7$ итераций. Кроме того, интенсивность возмущения заметно затухает после прекращения воздействия.

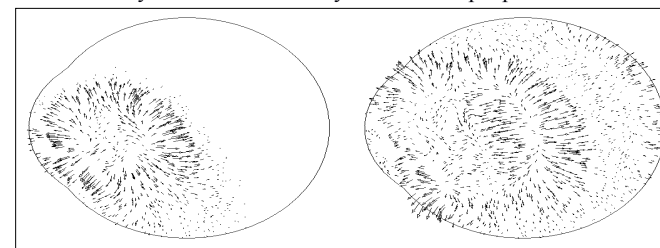


Рис. 2. Поле скоростей, интенсивность и направление скоростей частиц среды глаза в моменты времени: $t_1 = 6,24$ мкс и $t_2 = 23,6$ мкс

Fig. 2. Velocity field, intensity and direction of the velocities of the particles of the medium of the eye at times $t_1 = 6,24$ μs and $t_2 = 23,6$ μs

На рис. 2 приведено распределение скоростей частиц среды глаза в моменты времени $t_1 = 6,24$ мкс, когда возмущение достигло радужки, и $t_2 = 23,6$ мкс, при котором возмущение отразилось от задней поверхности глаза. Можно отметить, что движение среды глаза имеет достаточно сложный характер. В начальный момент времени под воздействием внешнего источника идет расширение биосреды, после прекращения воздействия в зоне хрусталика давление становится меньше, чем в окружающих его областях. Это вызывает изменение направления скоростей на противоположные и как следствие – последующее сжатие глаза.

Под углом 60° к оптической оси глаза вводится световод, по которому в хрусталик вводится лазерное излучение. Интенсивность лазерного излучения рассчитывается по закону Ламберта-Бера:

$$Q(r, h) = I(r)e^{-h/h}, I(R) = I_0 e^{-(r/R)^2},$$

где r – радиус облучаемой зоны, h – вертикальная координата, H – глубина поглощения ($H = 3.2$ мм), I_0 – интенсивность в центре световода, R – диаметр световода ($R = 0,3$ мм). Полная энергия излучения бралась 250 м.

Для математического описания поведения биосреды глаза использовались уравнения динамики деформируемой среды в следующем виде:

$$\rho \dot{v}_i - \nabla_j \sigma_{ij} = 0; i, j = 1, 2; \dot{\sigma}_{ij} = q_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kk} - \frac{\gamma \delta_{ij}}{\rho c} Q - \frac{\delta_{ij}}{\tau_0} \theta; \dot{\theta} = -\frac{\gamma}{\rho c} \dot{\epsilon}_{kk} + \frac{S_{kl} S_{kl}}{\mu \tau_0} + \frac{Q}{\rho c};$$

здесь Q_0 – плотность объемных источников энергии, θ – коэффициент теплопроводности,

$$q_{ijkl} = \lambda \sigma_{ij} \sigma_{kl} - \frac{\gamma \delta_{kl} \delta_{ij}}{\rho c} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{jk} \delta_{il}).$$

Физические константы для каждого элемента глаза полагались следующими (μ , λ – коэффициенты Лямэ, ρ – плотность, c – удельная теплоемкость, α – коэффициент линейного расширения, τ – время релаксации).

Во время операции глаз периодически расширялся и сжимался. При этом в зонах расширения возможны разрывы тканей и появление кавитационных процессов. Кроме того, на рассматриваемую волновую картину оказывают влияние появление отраженных волн от свободной границы глаза и границ материалов глаза (рис. 2).

На основании данной модели можно оптимизировать режимы работы лазера с тем, чтобы снизить травмирующее воздействие на ткани как переднего, так и заднего сегментов глаза.

В целом возмущения в области хрусталика локализуются и ослабевают по мере удаления от внешнего источника. Это вполне согласуется с клиническими данными, так как заметных разрушений вне хрусталиковой сумки обычно не наблюдается. Более слабые, возмущения достигаются для сетчатки и зрительного нерва и области роговицы.

В результате моделирования получены численные характеристики происходящих динамических процессов при лазерной экстракции катаракты. На волновую картину оказывают влияние появление отраженных волн от свободной границы глаза и границ материалов глаза (рис. 3).

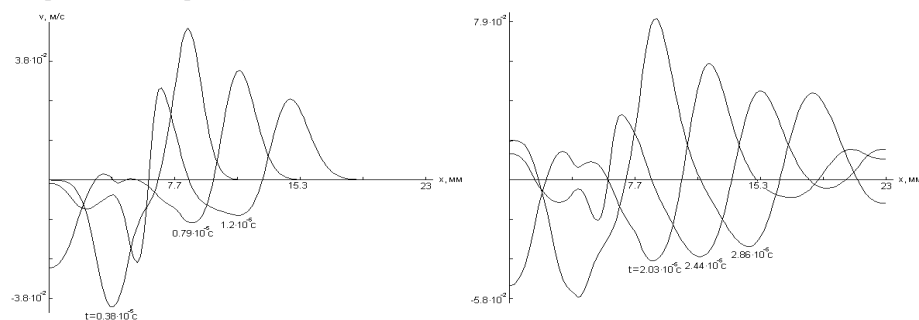


Рис. 3. Проекция значений компонент скоростей на оптическую ось глаза в различные моменты времени

Fig. 3. Projection of the values of the velocity components on the optical axis of the eye at different points in time

Таким образом, моделирование и выполнение операций на хрусталике глаза методом лазерной экстракции катаракты было успешно проведено.

5. Математическое моделирование предмета «Вычислительная геометрия»

5.1 Определение Вычислительной геометрии

Шедевром прикладной математики является античная геометрия Евклида. Главным его вкладом в геометрию, изложенным в «Началах» является: аксиоматический метод доказательства утверждений. Евклидова схема состоит из алгоритма и его доказательства. Евклидова геометрия включает набор допустимых инструментов (линейка, циркуль) и множество допустимых операций, которые можно выполнить с их помощью. Позднее Архимед предложил корректную конструкцию для задачи трех секций угла в 60° , добавив новые примитивы. Абель в 1828 году предложил найти корень любого алгебраического уравнения, используя только арифметические операции. Задача определения количественной меры сложности была сформулирована в 1902 году Лемуаном. Гилберт сформулировал необходимое и достаточное условия вычислимости f с использованием n операций при извлечении квадратного корня. В 1972 году Джордж Мор определил, что любое построение, которое осуществляется с помощью циркуля и линейки, можно выполнить только циркулем в случае, когда искомые объекты определяются точками. Таким образом, была выдвинута идея моделирования с использованием линейки и конечного числа операций циркуля.

Название «Вычислительная геометрия» впервые официально появилось на русском языке в связи с выходом монографии [33]. В этой монографии шла речь о задачах геометрического моделирования. Спустя шесть лет на русском языке вышла монография [34] с близким названием, но в ней шла речь об анализе оценок сложности и построении эффективных комбинаторных алгоритмов для решения геометрических задач. Оба направления имеют глубокие геометрические корни и непосредственную связь с ЭВМ. На сегодняшний день за первым направлением закрепилось название «геометрическое моделирование», а за вторым – «вычислительная геометрия».

Определение. Вычислительная геометрия – это наука, предметом исследования которой является анализ и построение эффективных алгоритмов решения геометрических задач, оценки их сложности средствами теории алгоритмов.

Вычислительная геометрия (computational geometry) стала отраслью компьютерных наук для изучения алгоритмов решения задач геометрии на ЭВМ. Основой развития вычислительной геометрии как дисциплины стала компьютерная графика и системы автоматизированного проектирования. Многие задачи вычислительной геометрии являются классическими и могут использоваться при математической визуализации геометрических объектов. Другим важным применением вычислительной геометрии является робототехника (задачи распознавания образов, планирование их движениями), геоинформационные системы (геометрический поиск, планирование маршрута), дизайн микросхем, программирование станков с числовым программным управлением и др.

5.2 Основные методы и задачи вычислительной геометрии

Основными разделами предмета вычислительной геометрии являются следующие.

- **Комбинаторная вычислительная геометрия**, или алгоритмическая геометрия, которая рассматривает геометрические объекты как дискретные сущности. Основопологающим материалом является книга [33], в которой впервые в 1975 был использован термин «вычислительная геометрия» в таком определении.
- **Численная вычислительная геометрия**, или машинная геометрия – это геометрическое моделирование, которое имеет дело в основном с представлением объектов реального мира в форме пригодной для дальнейшей компьютерной обработки. Этот раздел можно рассматривать как дальнейшее развитие вычислительной геометрии и часто рассматривается как раздел компьютерной графики.

Комбинаторная вычислительная геометрия содержит разработанные эффективные алгоритмы и структуры данных для решения задач в терминах базовых геометрических объектов: точки, отрезки, многоугольники, многогранники и др.

Вычислительную геометрию используют для работы над очень большими наборами данных с десятком или сотен миллионов точек. В вычислительной геометрии различают статические задачи и задачи геометрического поиска.

К статическим задачам относятся следующие:

- выпуклая оболочка с набором точек, необходимых для нахождения наименьшего выпуклого многоугольника, содержащего все точки;
- пересечение отрезков в наборе отрезков;
- триангуляция Делона;
- диаграмма Вороного, содержащая набор точек, разделяющих пространство на сектора, каждая точка которых ближе к набору других;
- задача ближайшей пары точек из набора точек для нахождения кратчайшего расстояния;
- евклидов кратчайший путь, который соединяет две точки в Евклидовом пространстве (с полигональными препятствиями) кратчайшим образом.
- триангуляция многоугольника – разбивка на внутренние треугольники.

В этих задачах входные данные состоят из двух частей: пространство поиска и запросов, которые разнятся в различных видах задач [34]. Для обеспечения эффективного выполнения нескольких запросов пространство поиска проводится предварительная обработка вида:

- региональный поиск с целью эффективного поиска и обработки набора точек, содержащихся в запрошенном регионе;
- локализация точки, основанная на разбиении пространства на регионы с целью определения заданной точки в нахождения ее определенном регионе;
- поиск ближайшего соседа среди набора точек пространства;
- трассировка лучей в заданном наборе объектов пространства лучей, которые пересекают запрошенный луч.

Среди этих классов методов рассматривается метод локализации точек в простых и выпуклых многоугольниках.

Динамические задачи – это задачи, входные данные которых меняются (добавляются или удаляются). Алгоритмы решения таких задач основываются на динамических структурах данных. Любую задачу вычислительной геометрии можно решать динамически, но за счет дополнительных вычислительных ресурсов. Т.е. региональный поиск, построение выпуклой оболочки можно проводить над множеством точек, которые изменяются. Вычислительная сложность этого класса задач задается такими параметрами:

- ресурсы, необходимые для определения структуры данных при поиске;
- ресурсы, необходимые для модификации построенной структуры и задания ресурсов для получения ответа на запросы.

К динамическим методам вычислительной геометрии относятся методы регионального поиска, основанные на методах локализации точек на простых и выпуклых многоугольниках:

- метод Грехема и Джарвиса для обхода точек в простых и выпуклых многоугольниках, пересеченных прямыми линиями, для решения задач с использованием арифметических операций и уравнений;
- метод быстрой сортировки на множестве точек и линий пересечения выпуклых и невыпуклых фигур с системой координат;
- метод М.Шеймоса по структурной организации данных для выпуклых многоугольников на множестве точек, а также использования описания данных по методу Препарата, в соответствующих точках внутри и вне выпуклых оболочек. Произошел переход к новым графовым структурам Штейнера для решения разных задач триангуляции и поиска

наиближайшего соседа и др.

Вариации. Во многих программах задачи вариации рассматривается как задачи первого класса. Тем не менее, во многих случаях нужно определить курсор мышки внутри данного многоугольника. Курсор постоянно перемещается, а многоугольник не меняется. Аналогично можно проверять определенный летательный аппарат, который изображен на экране радара, и не пересек границу страны. Такие задачи можно считать задачами геометрического запроса. В CAD-системах сам многоугольник может варьироваться, поэтому задача является динамической. Таким образом, в описание онтологической схемы вычислительной геометрии входят: комбинаторная вычислительная геометрия и классы методов: статистические, динамические методы и задачи вариации.

5.3 Моделирование графовой онтологической схемы вычислительной геометрии

Существует целый ряд инструментов поддержки онтологий. Наибольшую популярность приобрел инструмент Protege. Этот инструмент основан на фреймвая модели представления знаний и редактирования моделей, описанных в разных форматах UML, XML, SHOE, DAML, OML, RDF и RDFS, и др. В Protege имеются готовые плагины: Protege OWL Plugin, подобный тестам JUnit; средства генерации описаний в языке Java и возможность преобразовать в формат XML-схемы на платформе Eclipse в XML Schema Infoset Model (XSD) [13-14, 19].

В Protege 4.1 онтология представляется классами, слотами, фасетами и аксиомами. Классы описывают базовые понятия предметной области, а слоты — их свойства. Фасеты описывают свойства слотов (конкретные типы и возможные диапазоны значений). Аксиомы определяют дополнительные ограничения (правила). Классы могут быть абстрактными или конкретными. Абстрактные классы являются контейнерами конкретных классов и могут содержать абстрактные атрибуты. Конкретные классы содержат слоты, которым могут быть значения атрибутов. Фасеты и слоты задаются графовыми XML-схемами. Кардинальность слота определяет возможное количество значений слота, ограничение типа значений слота (например, целое и др. экземпляры класса), предельные значения (мин. и макс.) для числовых слотов и т.п.

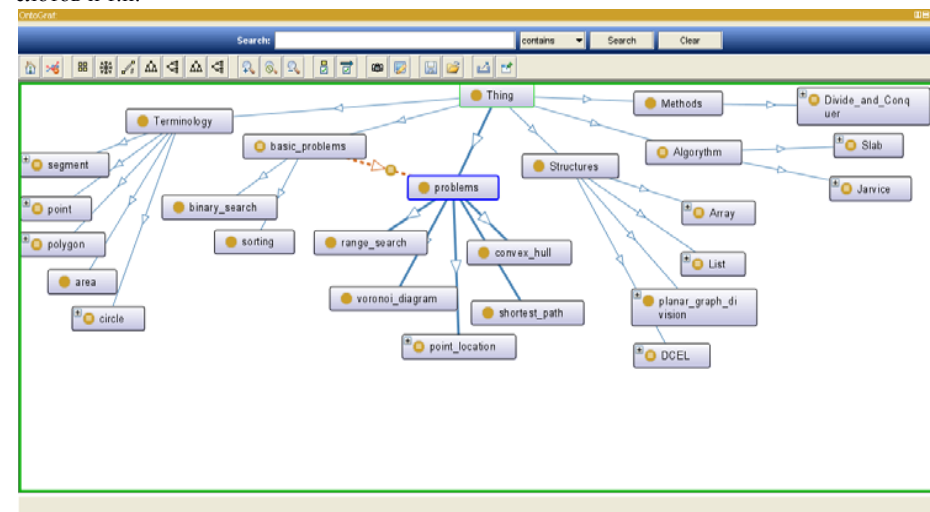


Рис. 3. Онтологическая схема задач вычислительной геометрии
Fig. 3. Ontological scheme of computational geometry problems

На Protege 4.1 было построено описание основных задач «Вычислительная геометрия» в виде онтологической модели (рис. 4). Модель отображает графовую XML-структуру, в вершинах которой находятся названные методы вычисления разных геометрических задач.

Все геометрические задачи, представленные в вершинах графовой схемы онтологии, представлены в языке XML, тексты которых занимают более 15 стр. В МФТИ на кафедре Информатика и вычислительная физика создается сайт «Вычислительная геометрия» [35] для обучения студентов этому предмету, а также теории и технологии программирования [36].

6. Заключение

Описаны подходы к моделированию технических средств задач прикладной математики, проведения их к постановке на ЭВМ путем декомпозиции задач на отдельные функциональные подзадачи, их алгоритмизации и описания средствами математической логики, граф-схемного языка А.А. Ляпунова, адресного языка и языков программирования.

Дана характеристика численного моделирования и программирования задач прикладной математики: баллистики, физического эксперимента, механики сплошных сред, возглавляемыми учеными академиками нашей страны (А.А.Самарским, М.В. Келдышем, О.М. Белоцерковским, А.А. Дороднициным и др.). Рассмотрены программные средства моделирования математических задач прикладных областей (физического эксперимента, ядерного и термоядерного проекта и др.) и дисциплин: алгебра, геометрия, интеллект, медицина, биология, нейро- и нано-технологий и др. Описаны новые многопроцессорные компьютерные системы для решения сложных задач. Дано описание технологии экстракции катаракты глаза и учебных дисциплин «Вычислительная геометрия» и теории технологии программирования в МФТИ, представленных на сайте <http://7dragons.ru/ru>.

Список литературы / References

- [1] В.В. Липаев. Фрагменты истории развития отечественного программирования для специализированных ЭВМ в 50-80-е годы. М., Синтег, 2003, 126 стр. / V.V. Lipaev. Fragments of the history of the development of domestic programming for specialized computers in the 50-80s. M., Sinteg, 2003, 126 p. (in Russian).
- [2] В.М. Глушков. Об одном методе автоматизации программирования. Проблемы кибернетики, № 2, 1959, стр. 181-184 / V.M. Glushkov. On one method of programming automation. Problems of Cybernetics, No. 2, 1959, pp. 181-184 (in Russian).
- [3] Е.А. Жоголев, Г.С. Росляков, Н.П. Трифонов, М.Р. Шура-Бура. Система стандартных подпрограмм. ГИФМЛ, 1958, 231 стр. / E.A. Zhogolev, G.S. Roslyakov, N.P. Trifonov, M.R. Shura-Bura. System of standard subroutines. GIFML, 1958, 231 p. (in Russian).
- [4] А.П. Ершов. Введение в теоретическое программирование. М., Физтехлит, 1977, 286 стр. / A.P. Ershov. Introduction to theoretical programming. Moscow, Fiztekhlit, 1977, 286 p. (in Russian).
- [5] С.С. Лавров. Лекции по теории программирования. СПб, Нестор, 1999, 107 стр. / S.S. Lavrov. Lectures on programming theory. SPb, Nestor, 1999, 107 p. (in Russian).
- [6] А.А. Самарский, А.П. Михайлов. Компьютеры и жизнь (математическое моделирование). М., Педагогика, 1987, 128 стр. / A.A. Samarsky, A.P. Mikhailov. Computers and Life (Mathematical Modeling). M., Pedagogy, 1987, 128 p. (in Russian).
- [7] А.А. Самарский, Ю.П. Попов. Разностные методы решения задач газовой динамики. М., Наука, Физматлит, 1992, 423 стр. / A.A. Samarsky, Yu.P. Popov. Difference methods for solving problems of gas dynamics. Moscow, Nauka, Fizmatlit, 1992, 423 p. (in Russian).
- [8] А.А. Самарский. Теория разностных схем. М., Наука, 1977, 656 стр. / A.A. Samarskiy. The theory of difference schemes. Moscow, Nauka, 1977, 656 p. (in Russian).
- [9] О.М. Белоцерковский. Численное моделирование в механике сплошных сред. М., Наука, Физматлит, 1994, 441стр. / O.M. Belotserkovsky. Numerical modeling in continuum mechanics. M., Nauka, Fizmatlit, 1994, 441p. (in Russian).
- [10] О.М. Белоцерковский, А.С. Холодов. Медицина в зеркале информатики. М., Наука, 2008, 242 стр. / O.M. Belotserkovsky, A.S. Kholodov. Medicine in the Mirror of Informatics. M., Nauka, 2008, 242 p. (in Russian).

- [11] В.А. Евстигнеев. Применение теории графов в программирование. М., Наука, Редакция физ.-мат. наук, 1985 г., 351 стр. / V.A. Evstigneev. Application of graph theory to programming. M., Nauka, 1985, 351 p. (in Russian).
- [12] В.Н. Касьянов, В.А. Евстигнеев. Графы в программировании: обработка, визуализация и применение. СПб., БХВ-Петербург, 2003 г., 1104 стр. / V.N. Kasyanov, V.A. Evstigneev. Graphs in programming: processing, visualization and application. SPb., BHV-Petersburg, 2003, 1104 p. (in Russian).
- [13] Е.М. Лаврищева, В.Н. Грищенко. Связь разноязыковых модулей в ОС ЕС. М., Финансы и статистика, 1982 г., 137 стр. / E.M. Lavrisheva, V.N. Grishchenko. Linking multilingual modules in the EU OS. M., Finance and Statistics, 1982, 137 p. (in Russian).
- [14] Е.М. Lavrisheva. The Theory Graph Modeling and Programming Paradigm of Systems FROM Modules TO the Application Areas. Transactions on Machine Learning and Artificial Intelligence, vol. 7, no 4, 2019, pp. 21-43.
- [15] Лаврищева Е.М. Теория объектно-компонентного моделирования программных систем. Препринт ИСП РАН, № 29, 2016 г., 52 стр. / Lavrisheva E.M. The theory of object-component modeling of software systems. ISP RAS Preprint, No. 29, 2016, 52 p. (in Russian).
- [16] И.Б. Бурдонов, А.С. Косачев, В.В. Кулямин. Теория соответствия для систем с блокировками и разрушениями. Москва, Наука, 2008 г., 412 стр. / B. Burdonov, A.S. Kosachev, V.V. Kulyamin. Correspondence theory for systems with lockings and destructions. Moscow, Nauka, 2008, 412 p. (in Russian).
- [17] З.В. Апанович. Визуализация больших графов и матрицы смежности. Труды XX Всероссийской научной конференции «Научный сервис в сети Интернет», 2018 г., стр. 28-41 / Z.V. Apanovich. Visualization of large graphs and adjacency matrices. In Proc. of the XX All-Russian Scientific Conference on Scientific Service on the Internet, 2018, pp. 38-41 (in Russian).
- [18] Е.М. Лаврищева, А.К.Петренко. Моделирование семейств программных систем. Труды ИСП РАН, том 28, вып. 6, 2016 г., стр. 49-64 / Lavrisheva K.M., Petrenko A.K. Software Product Lines Modeling. Trudy ISP RAN/Proc. ISP RAS, vol. 28, issue 6, 2016, pp. 49-64 (in Russian). DOI: 10.15514/ISPRAS-2016-28(6)-4.
- [19] Е.М. Лаврищева. Программная инженерия и технология программирования сложных систем. М., Юрайт, 2019 г., 432стр. / E.M. Lavrisheva. Software engineering and technology of complex systems programming. M., Urait, 2019, 432 p. (in Russian).
- [20] Е.Ю. Титаренко. Теория графов. Институт кибернетики Томского политехнического университета, 2016 г., 64 стр. / E.Yu. Titarenko. Graph theory. Institute of Cybernetics, Tomsk Polytechnic University, 2016, 64 p. (in Russian).
- [21] Е.М. Lavrishcheva, I.B. Petrov. Ways of Development of Computer Technologies to Perspective Nano. Future Technologies Conference (FTC), 2017, pp. 539-548.
- [22] Г.И. Марчук. Методы расщепления, М., Наука, 1988 г., 263 стр. / G.I. Marchuk. Splitting methods, M., Nauka, 1988, 263 p.
- [23] М.В. Якововский. Введение в параллельные методы решения задач. М., МГУ, 2012 г., 328 стр. / M.V. Jacobovsky. Introduction to the Methods of Parallel Problem Solving. M., Moscow State University, 2012, 328 pp. (in Russian).
- [24] А.Г. Куликовский, Н.В. Погорелов, А.Ю. Семенов. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М., Физматлит, 2012 г., 656 стр. / A.G. Kulikovskiy, N.V. Pogorelov, A.Yu. Semenov. Mathematical problems in the numerical solution of hyperbolic systems of equations. M., Fizmatlit, 2012, 656 p. (in Russian).
- [25] Б. Олдер, С. Фернбах, М. Ротенберг (редакторы). Вычислительные методы в физике плазмы. М., Мир, 1974. 514 стр. / B. Alder, S. Fernbach, M. Rotenberg (editors). Methods in computational physics, vol. 9. Orlando Academic Pr., 1970, 498 p.
- [26] Н.Г. Яковлев. Математическое моделирование земной системы. М., МАКС-Пресс, 2016 г., 328 стр. / N.G. Yakovlev. Mathematical modeling of the earth system. M., MAKS-Press, 2016, 328 p. (in Russian).
- [27] И.Е. Квасов, В.Б. Левянт, И.Б. Петров. Решение прямых задач сейсморазведки в трещиноватых средах методом сеточно-характеристического моделирования. М., Геомодель, 2016 г., 295 стр. / I.E. Kvasov, V.B. Levyant, I.B. Petrov. Solving direct problems of seismic prospecting in fractured media by the method of grid-characteristic modeling. M., Geomodel, 2016, 295 p. (in Russian).
- [28] И.Б. Петров. Воздействие льда и воды на оффшорные структуры и прибрежные зоны в Арктике. Сборник трудов Научной сессии общего собрания членов РАН, 16 декабря 2014 г., М., Наука, 2015 г., стр. 230-237 / I.B. Petrov. Impact of ice and water on offshore structures and coastal zones in the Arctic.

- In Proc. of the Scientific Session of the General Meeting of Members of the Russian Academy of Sciences, December 16, 2014, M., Nauka, 2015, pp. 230-237 (in Russian).
- [29] Дж. Мюррей. Математическая биология. Т. 1. Введение. М., Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2009 г., 776 стр. / J.D. Murray. Mathematical Biology: I. An Introduction. Springer, 2007, 574 p.
- [30] Г.И. Марчук. Математические модели в иммунологии. М., Наука, 1985 г., 239 стр. / G.I. Marchuk. Mathematical models in immunology. M., Nauka, 1985, 239 p. (in Russian).
- [31] Е.М. Лаврищева, А.Г. Рыжов. Применение теории общих типов данных стандарта ISO/IEC 11404 GDT к Big Data. Евразийский Союз Ученых (ЕСУ), no. 31, 2016 г., стр. 99-108 / E.M. Lavrischeva, A.G. Ryzhov. Application of the theory of common data types of the ISO / IEC 11404 GDT standard to Big Data. Eurasian Union of Scientists, no. 31, 2016, pp. 99-108. (in Russian).
- [32] И.Б. Петров. Математическое моделирование в медицине и биологии на основе моделей механики сплошных сред. Труды МФТИ, 2009 г., том 1, no 1, стр. 5-16 / I.B. Petrov. Mathematical modeling in medicine and biology based on models of continuum mechanics. Proceedings of MIPT, 2009, volume 1, no 1, pp. 5-16. (in Russian).
- [33] А. Фокс, М. Пратт. Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и производстве. М., Мир, 1982 г., 304 стр. / I.D. Faux, M.J. Pratt. Computational Geometry for Design and Manufacture. Ellis Horwood, 1980, 329 p.
- [34] Ф. Препарата, М. Шеймос. Вычислительная геометрия: Введение. М., Мир, 1989 г., 478 стр. / F.P. Preparata, M.I. Shamos. Computational Geometry: An Introduction. Springer, 1985, 390 p.
- [35] Е.М. Лаврищева, Л.Е. Карпов, А.Н. Томилин. Семантические ресурсы для разработки онтологии научной и инженерной предметных областей Труды XVII Всероссийской научной конференции «Научный сервис в сети Интернет», 2016 г., стр. 223-239 / E.M. Lavrischeva, L.E. Karpov, A.N. Tomilin. Semantic resources for the development of ontology of scientific and engineering subject areas. In Proc. of the XVII All-Russian Scientific Conference on Scientific Service on the Internet, 2016, pp. 223-239. (in Russian).
- [36] Е.М. Лаврищева. Программная инженерия. Тема 1. Теория программирования. Учебно-методическое пособие. М., МФТИ, 2016 г., 48 стр. / E.M. Lavrischeva. Software engineering. Topic 1. Programming theory. Study guide. M., MIPT, 2016, 48 p. (in Russian).
- [37] Е.М. Лаврищева. Программная инженерия. Тема 2. Технология программирования. Учебно-методическое пособие. М., МФТИ, 2016 г., 52 стр. / E.M. Lavrischeva. Software engineering. Topic 2. Programming technology. Study guide. M., MIPT, 2016, 52 p. (in Russian).

Информация об авторах / Information about authors

Екатерина Михайловна ЛАВРИЩЕВА – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник ИСП РАН, профессор МФТИ, лауреат премии кабинета Министров СССР (1985). Область интересов: надежность и качество, моделирование сложных систем, Web-системы, сборочное программирование.

Ekaterina Mikhailovna LAVRISCHEVA – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Principal Researcher at ISP RAS, Professor at Moscow Institute of Physics and Technology, Laureate of the USSR Cabinet of Ministers Prize (1985). Areas of interest: reliability and quality, modeling of complex systems, Web-systems, assembly programming.

Игорь Борисович ПЕТРОВ является доктором физико-математических наук, профессором, членом-корреспондентом РАН, заведующим кафедрой информатики МФТИ. В число научных интересов входят сеточно-характеристический метод, математическое моделирование, высокопроизводительные вычислительные системы.

Igor Borisovich PETROV – Doctor of Physical and Mathematical sciences, Professor, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Head of the Department of Computer Science at the Moscow Institute of Physics and Technology. His research interests include the grid-characteristic method, mathematical modeling, and high-performance computing systems.