



Возникновение контрастных структур для галактического магнитного поля: теоретические оценки и моделирование на видеокартах

^{1,2} Е.А. Михайлов, ORCID: 0000-0002-9747-4039 <ea.mikhajlov@physics.msu.ru>

¹ Т.Т. Хасаева, ORCID: 0000-0003-2431-8024 <justanyan@yandex.ru>

³ И.О. Тепляков, ORCID: 0000-0002-2355-1935 <igor.teplyakov@mail.ru>

¹ Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, 119991, Россия, Москва, Ленинские горы, д. 1.

² Физический институт имени П.Н. Лебедева РАН, 119991, Россия, г. Москва, Ленинский проспект, д. 53

³ Объединенный институт высоких температур РАН, 125421, Россия, Москва, Ижорская ул., д. 13, стр. 2

Аннотация. Генерация магнитных полей галактик – важная задача как с точки зрения космической магнитной гидродинамики, так и с позиции вычислительной математики (как правило, моделирование полей требует значительных компьютерных ресурсов, часто необходимо использование параллельных вычислений). Процесс эволюции поля описывается с помощью уравнений динамо среднего поля, которые в общем случае являются нелинейными. Они допускают формирование контрастных структур, предсказываемых теорией сингулярных возмущений, описывающей уравнения с малым параметром при старшей производной. С астрономической точки зрения подобные решения обычно связывают со спиральной структурой галактик и с формированием инверсий магнитного поля: в разных частях галактики формируются области с противоположным направлением магнитного поля, разделенные узкими переходными слоями. С вычислительной точки зрения решение полной двумерной задачи является достаточно ресурсоемкой задачей, поэтому оказывается разумным использование параллельных вычислений. Одним из вариантов реализации данного решения выступает платформа OpenCL, позволяющая в несколько раз увеличить производительность процесса. OpenCL является перспективным кроссплатформенным стандартом для разработки приложений, в частности использующих GPU, производительность которых по мере эволюции драйверов стремительно увеличивается. В настоящей работе представлены основные теоретические оценки поведения магнитного поля, которые в дальнейшем подтверждаются и уточняются в ходе компьютерного моделирования на видеокартах. Показано, что механизм возникновения переходных слоев в радиальном и азимутальном направлениях описывается принципиально различными механизмами. В то время как радиальные инверсии магнитного поля оказываются достаточно устойчивыми, все азимутальные структуры быстро размываются за счет характера течений межзвездного газа. Это означает также практическую нереализуемость возникновения неосесимметричных распределений магнитного поля.

Ключевые слова: магнитная гидродинамика; параллельные вычисления; магнитные поля галактик; контрастные структуры

Для цитирования: Михайлов Е.А., Хасаева Т.Т., Тепляков И.О. Возникновение контрастных структур для галактического магнитного поля: теоретические оценки и моделирование на видеокартах. Труды ИСП РАН, том 33, вып. 6, 2021 г., стр. 253–264. DOI: 10.15514/ISPRAS-2021-33(6)–18

Благодарности. Работа выполнена с использованием оборудования Центра коллективного пользования сверхпроизводительными вычислительными ресурсами МГУ имени М.В. Ломоносова.

The emergence of contrast structures for galactic magnetic field: theoretical estimates and modeling on GPU

^{1,2} E.A. Mikhailov, ORCID: 0000-0002-9747-4039 <ea.mikhajlov@physics.msu.ru>

¹ T.T. Khasaeva, ORCID: 0000-0003-2431-8024 <justanyan@yandex.ru>

³ I.O. Teplyakov, ORCID: 0000-0002-2355-1935 <igor.teplyakov@mail.ru>

¹ M.V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991, Russia.

² P.N. Lebedev Russian Academy of science Physical Institute, Moscow, 119991, Russia.

³ Russian Academy of science Joint Institute of High Temperatures, Moscow, 125421, Russia.

Abstract. Magnetic field generation in galaxies turns out to be a significant problem both for cosmic magnetohydrodynamics and mathematical physics. It is based on dynamo mechanism characterising the transition between the energy of medium turbulent motions and the magnetic field energy. The evolution of the field is described with the help of mean field dynamo equations. For galaxies the solutions are commonly found using so-called “no- z ” approximation, while the half-thickness of the galactic disc is considered negligible. In nonlinear case mentioned equations admit contrast structure formation, predicted by the singular perturbation theory, describing equations with small parameter at the elder derivative. From astronomical point of view some authors tend to connect such solutions with the spiral structure of the galaxies and the formation of magnetic field reversals (when in different parts of galaxy there are regions with opposite directions of magnetic, divided by a thin transition layer). From numerical point of view finding the solution of two-dimensional system of equations requires large computational resources, for this reason using GPU and parallel calculations turns out to be reasonable. One of the implementation methods is calculating using OpenCL, which allows one to increase the process efficiency several times. OpenCL is a perspective crossplatform standard for development of applications, particularly involving GPU, the efficiency of which is rapidly increasing as the drivers evolve. The present work presents basic theoretical assessments of magnetic field behaviour, which are further confirmed and clarified during the computations. It is shown that the formation of the transition layers is described by fundamentally different mechanisms in radial and azimuthal directions. While radial reversals of the field turn out to be rather stable, all of the azimuthal structures are rapidly blurred due to the nature of the interstellar medium motions. That also indicates the practical impossibility of non-axisymmetric distributions of the field.

Keywords: magnetohydrodynamics; parallel calculations; galactic magnetic field; contrast structures

For citation: Mikhailov E.A., Khasaeva T.T., Teplyakov I.O. The emergence of contrast structures for galactic magnetic field: theoretical estimates and modeling on GPU. Trudy ISP RAN/Proc. ISP RAS, vol. 33, issue 6, 2021, pp. 253-264 (in Russian). DOI: 10.15514/ISPRAS-2021-33(6)–18

Acknowledgements. The work was performed using the equipment of the Center for Collective Use of Supercomputing Resources of Lomonosov Moscow State University.

1. Введение

Генерация магнитных полей галактик представляет собой одну из классических задач теории динамо [1]. В свою очередь, теория динамо занимает важное место в космической магнитной гидродинамике, объясняя происхождение магнитных полей большого числа астрофизических объектов [2, 3]. Также нельзя не отметить, что большое количество задач, возникающих при обсуждении генерации космических магнитных полей представляют исключительную важность с точки зрения математической физики, являя собой важные примеры реализации тех или иных теоретических представлений [4, 5, 6, 7].

В случае исследования регулярных структур магнитных полей важно отметить, что уравнение галактического динамо являются результатом усреднения, которое ведется по областям, размеры которых превышают типичные масштабы турбулентности для

межзвездного газа [1, 3, 8]. Это приводит к появлению в уравнениях для магнитного поля дополнительных слагаемых по сравнению с классическими уравнениями магнитной гидродинамики. Ключевую роль играют альфа-эффект и дифференциальное вращение [9, 10]. Альфа-эффект связан с наличием так называемой спиральности турбулентных движений [1]. В случае галактик (а также большого числа других астрофизических объектов) завихренность течений имеет ненулевую среднюю проекцию на направление скорости. Кроме того, особую роль играют также противоположные знаки завихренности в разных полушариях – так называемая зеркальная асимметрия альфа-эффекта [9, 10]. Все это приводит к тому, что вмороженное магнитное поле интенсивно вращается за счет подобных течений. Также важно отметить, что по мере роста магнитного поля энергия турбулентных движений сокращается, что приводит к насыщению его роста. В таком случае уравнения, описывающие генерацию магнитного поля, становятся нелинейными [10].

Дифференциальное вращение характеризует тот факт, что большинство галактик вращаются по закону, далекому от твердотельного. Это означает, что угловая скорость уменьшается по мере удаления от оси вращения, и приводит как к повороту магнитного поля, так и к его усилению [2].

Как правило, уравнения для генерации магнитного поля удобнее решать в рамках различных приближений, учитывающих геометрические параметры исследуемого объекта. Так, для галактик наибольшую популярность получило так называемое планарное приближение [11]. Оно принимает во внимание тот факт, что большинство галактических дисков – достаточно тонкие, что позволяет несколько упростить решаемую задачу. Уравнения планарного приближения представляют собой систему нелинейных параболических уравнений с малым параметром при операторе Лапласа.

Подобная задача представляет собой почти классическую задачу о возникновении контрастных структур. Они предсказываются в рамках теории сингулярных возмущений, хорошо известной в математической физике [12, 13]. В таком случае оказывается возможной генерация магнитных полей, которые имеют противоположные направления в разных частях галактики, разделенных узкими переходными слоями.

Данные решения вызывают большой интерес также и с точки зрения астрономии [14, 15, 16, 17, 18, 19, 20]. В случае Млечного Пути хорошо известно, что его магнитное поле демонстрирует двукратную смену направления: она происходит на расстоянии около 5 кпк и 7 кпк от оси вращения [1]. Таким образом, области с магнитным полем одного и того же направления образуют концентрические области круговой формы. В настоящий момент существуют серьезные основания предполагать возможность существования подобных структур и в других галактических объектах, для которых имеются данные о фарадеевском вращении плоскости поляризации для проходящих через них радиоволн. Ряд работ также предполагал возможность существования неосесимметричных контрастных структур, ассоциируемых со спиральной структурой галактик. Вместе с тем, согласно современным астрономическим наблюдениям возможность их возникновения является сомнительной [6].

Отметим, что построение достаточно точной модели возникновения контрастных структур в галактике до сих пор является затруднительным. Большинство имеющихся теоретических представлений связаны либо с единственным эволюционным уравнением, либо с парой уравнений, в которых присутствуют принципиально разные временные масштабы. В то же время, в случае галактического поля мы имеем систему из как минимум двух уравнений магнитной гидродинамики, в каждом из которых присутствует один и тот же коэффициент турбулентной диффузии при лапласиане. По этой причине ответ на вопрос о том, как именно они устроены и как происходит их генерация, может быть дан лишь с численных позиций [21, 22]. Задачи, связанные с генерацией магнитных полей, оказываются весьма ресурсоемкими (особенно в тех случаях, когда необходимо рассмотреть влияние различных случайных эффектов в начальных данных и провести серию вычислений). Поэтому

практически неизбежным является использование параллельных вычислений. В настоящий момент один из самых распространенных подходов связан с использованием вычислений на видеокартах [23, 24, 25]. Он позволяет заметно ускорить процесс расчета, добившись значимых результатов за короткие временные промежутки.

В настоящей работе представлены основные теоретические модели для генерации магнитных полей и возникновения инверсий. Исследован вопрос о том, насколько возможным может быть генерация полей той или иной симметрии, а также как они могут быть связаны с параметрами, характерными для конкретных галактических объектов. После этого проводится численное исследование соответствующего процесса с применением параллельных вычислений с использованием графических процессоров, которое позволяет окончательно установить, является ли тот или иной результат возможным. Исследуется вопрос о движении переходных слоев между областями с противоположным магнитным полем, дан ответ на вопрос о том, насколько подобное движение может разрушить сформировавшиеся контрастные структуры магнитного поля. Наконец, в работе даются оценки того, как полученные результаты могут быть ассоциированы с теми или иными астрономическими наблюдениями.

2. Эволюция контрастных структур

Генерация магнитного поля в галактике описывается с помощью уравнения динамо среднего поля. Оно исходит из того, что магнитное поле является результатом усреднения по масштабам, соответствующим размерам турбулентных ячеек:

$$\mathbf{B} = \langle \mathbf{H} \rangle.$$

Тогда уравнения магнитной гидродинамики сводятся к виду [1]:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\alpha \mathbf{B}) + \nabla \times [\mathbf{V} \times \mathbf{B}] + \eta \Delta \mathbf{B};$$

где введен коэффициент, отвечающий за альфа-эффект [1]:

$$\alpha = -\frac{\tau}{3} \langle \mathbf{v} \cdot \nabla \times \mathbf{v} \rangle;$$

где τ - корреляционное время, \mathbf{v} – скорость турбулентных движений.

Отметим, что по мере роста магнитного поля скорости турбулентных движений будут замедляться. Это может быть учтено с помощью следующей модели:

$$\alpha(r, \mathbf{B}) = \alpha_0(r) \left(1 - \frac{B^2}{B^{*2}} \right);$$

где $\alpha_0(r)$ связан с пространственной структурой течений, а B^* – так называемое поле равномерного распределения, определяемое по закону [10]:

$$B^* = 2v_0 \sqrt{\pi \rho};$$

где ρ - плотность среды, а v_0 – начальное значение скорости турбулентных движений межзвездного газа.

Также данная система уравнений содержит крупномасштабную скорость движений, которая также является результатом усреднения и может быть ассоциирована с вращением галактики [11]:

$$\mathbf{V} = \langle \mathbf{v} \rangle = r \Omega \mathbf{e}_\phi.$$

В свою очередь, η представляет собой так называемый коэффициент турбулентной диффузии.

Если воспользоваться планарным приближением, использующим тот факт, что галактический диск достаточно тонкий, и применить ряд стандартных приближений, мы можем получить следующую систему уравнений [11, 21]:

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} = -\frac{\alpha(r)}{h} B_\varphi \left(1 - \frac{B_r^2 + B_\varphi^2}{B^{*2}} \right) - \Omega \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} - \frac{\pi^2}{4h^2} B_r + \eta \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_r}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} \right\},$$

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial t} = r \frac{d\Omega}{dr} B_r - \Omega \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} - \eta \frac{\pi^2}{4h^2} B_\varphi + \eta \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\varphi) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} \right\}.$$

Отметим, что скорость роста магнитного поля обусловлена совместным действием альфа-эффекта и дифференциального вращения. Скорость роста магнитного поля описывается с помощью выражения [22]:

$$\gamma(r) = \sqrt{\frac{\alpha(r)}{h} r \frac{d\Omega}{dr}} - \eta \frac{\pi^2}{4h^2}$$

Кроме того, анализ решений уравнений планарного приближения показывает, что основную роль в эволюции поля играет азимутальная компонента. Таким образом, можно считать, что $B_r \ll B_\varphi$ (при этом важно отметить, что хотя радиальное магнитное поле и является достаточно малым, нельзя пренебрегать им полностью).

Эволюция основной компоненты магнитного поля может описываться при помощи следующего качественного уравнения (опыт моделирования показывает, что оно принципиально правильно описывает большинство происходящих процессов) [22]:

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial t} = \gamma(r) B_\varphi \left(1 - \frac{B_\varphi^2}{B^{*2}} \right) - \Omega \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} + \eta \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\varphi) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_\varphi}{\partial \varphi^2} \right\}.$$

Особый интерес представляют решения, соответствующие так называемым контрастным структурам, когда в разных частях объекта может наблюдаться устойчивые магнитные поля противоположных направлений. В Млечном Пути существуют серьезные основания предполагать наличие резкой смены знака магнитного поля в радиальном направлении на расстоянии от центра, соответствующем примерно 5 кпк и 7 кпк [20, 21]. Кроме того, в ряде работ предполагается, что контрастные структуры могут в определенном смысле повторять спиральную структуру галактики.

Возникновение контрастной структуры – принципиально нелинейный процесс, который описывается в рамках так называемой теории сингулярных возмущений в математической физике [21, 22]. Обсудим принципиальную возможность возникновения «радиальных» и «азимутальных» инверсий магнитного поля.

В том случае, если мы исследуем «перескок» магнитного поля в радиальном направлении, ключевую роль будут играть производные магнитного поля, соответствующие угловой переменной. Кроме того, будем предполагать, что мы исследуем область на достаточно большом расстоянии от центра объекта, поэтому оператор Лапласа приближенно будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\varphi) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_\varphi}{\partial \varphi^2} \cong \frac{\partial^2 B_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\varphi}{\partial r}.$$

Как и принято в асимптотической теории контрастных структур, будем искать решение в автомодельном виде [13]:

$$B(r, t) = U(\xi),$$

где $\xi = \frac{r-r^*}{\sqrt{\eta}}$, r^* – расстояние, соответствующее локализации переходного слоя (возможно,

очень медленно зависящее от времени).

Тогда для данной функции $U(\xi)$ с учетом того, что $|r-r^*| \ll r^*$, пропорциональными степеням мы получим следующее уравнение с граничными условиями:

$$-\frac{1}{\sqrt{\eta}} \frac{dr^*}{dt} U' = \gamma U \left(1 - \frac{U^2}{B^{*2}} \right) + U'' + \frac{\sqrt{\eta}}{r^*} U'$$

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} U = \pm B^*$$

Предполагая, что скорость $\frac{dr^*}{dt}$ пропорциональна η , и оставляя только слагаемые порядка η^0 , мы можем получить следующее уравнение для приближения для функции U :

$$U'' + \gamma(r^*) U \left(1 - \frac{U^2}{B^{*2}} \right) = 0.$$

Его решение выглядит так [7]:

$$U(\xi) = B^* \tanh \left(\xi \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \right)$$

Исследуем теперь возможность движения структуры магнитного поля. Для этого учтем что $\gamma \cong \gamma(r^*) + \xi \sqrt{\eta} \gamma'(r^*)$. Тогда, учитывая в уравнении для поля слагаемые порядка $\sqrt{\eta}$, мы получим соотношение:

$$-\frac{1}{\sqrt{\eta}} \frac{dr^*}{dt} U' = \gamma'(r^*) U \left(1 - \frac{U^2}{B^{*2}} \right) + \frac{\sqrt{\eta}}{r^*} U'$$

Перепишем уравнение в форме:

$$\left(\frac{dr^*}{dt} + \frac{\eta}{r^*} \right) U' = -\gamma'(r^*) \eta U \left(1 - \frac{U^2}{B^{*2}} \right);$$

Домножив обе части на U' и проинтегрировав их по всей числовой оси, мы получим [13]:

$$\frac{dr^*}{dt} + \frac{\eta}{r^*} = -\eta \gamma'(r^*) \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} U \left(1 - \frac{U^2}{B^{*2}} \right) dU}{\int_{-\infty}^{+\infty} (U')^2 d\xi}.$$

Подставляя найденное выражение для функции U , мы получим [22]:

$$\frac{dr^*}{dt} = -\eta \left(\frac{1}{r^*} + \frac{\gamma'(r^*)}{2\gamma(r^*)} \right)$$

Отметим, что учитывая малую величину вязкости, скорость перемещения будет достаточно малой. Это позволит существовать устойчивым контрастными структурам. Кроме того,

характерное время возникновения контрастной структуры $\frac{1}{\gamma}$ будет меньше, чем время ее перемещения и разрушения:

$$\frac{1}{\gamma} \ll \frac{r^*}{\frac{dr^*}{dt}}.$$

Исследуем теперь вопрос о возможности генерации структур в азимутальном направлении. Это означает, что от радиальной координаты поле будет зависеть слабо, а оператор Лапласа - выглядеть так:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\varphi) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_\varphi}{\partial \varphi^2} \right\} \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_\varphi}{\partial \varphi^2}.$$

В таком случае уравнение для магнитного поля представляется в форме:

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial t} = \gamma(r) B_\varphi \left(1 - \frac{B_\varphi^2}{B^{*2}} \right) - \Omega \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} + \eta \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_\varphi}{\partial \varphi^2}.$$

В таком случае производная магнитного поля по азимутальному углу не может быть пренебрежимо малой по сравнению с остальными слагаемыми. Поэтому необходимо искать поле в следующей форме:

$$B_\varphi = B_\varphi(\varphi - \Omega t).$$

Это приводит уравнение к виду:

$$\gamma B_\varphi \left(1 - \frac{B_\varphi^2}{B^{*2}} \right) + \eta \frac{B_\varphi''}{r^2} = 0.$$

Его решение представляется в виде:

$$B_\varphi = \tanh \left(\frac{1}{r} \sqrt{\frac{\gamma}{2\eta}} (\varphi - \Omega t) \right)$$

Данная структура будет двигаться с азимутальной скоростью Ω . Типичное время движения этой структуры $\frac{1}{\Omega}$ будет вполне сопоставимо со временем генерации поля $\frac{1}{\gamma}$:

$$\frac{1}{\gamma} \sim \frac{1}{\Omega}.$$

Кроме того, возникновению контрастных структур азимутального типа мешает то, что скорость вращения отличается для различных расстояний от центра. Отметим, что при малых значениях угловой скорости не будет выполнено ключевое условие генерации поля – наличие дифференциального вращения.

Все это говорит о том, что генерация контрастных структур азимутального типа представляется маловероятной.

3. Решение задачи на видеокарте

Решение подобных задач требует высоких вычислительных мощностей ввиду необходимости перебора ряда решений. Характерное время формирования переходного слоя можно определить при помощи численного эксперимента, что подразумевает проверку работы программы для разных характерных времен расчета. Для решения данной проблемы

в задаче использовались параллельные методы вычисления на видеокартах [24]. Данный подход позволяет сократить время работы программы в десятки раз. Также это позволяет рассмотреть ряд различных начальных условий с переходными слоями и сравнить поведение магнитного поля с основными теоретическими предположениями.

Из численных соображений будет удобно использовать декартовую прямоугольную сетку по пространству [24]. Для этого необходимо ввести соответствующую замену:

$$\begin{aligned} x_i &= r \cos \varphi \\ y_j &= r \sin \varphi \end{aligned}$$

Здесь x_i и y_j – координаты узла сетки, соответствующего индексу $[i, j]$. Также из практических соображений на границе галактического диска и за его пределами поле обращается в нуль:

$$B_{r,\varphi}|_{r \geq R} = 0.$$

В действительности процессы, преобладающие в центральной части галактики, не могут быть описаны в рамках теории динамо, а также в ряде случаев обладают специфическими особенностями и не терпят обобщения. Таким образом, из области вычисления имеет смысл исключить зону, соответствующую центральной области галактики:

$$B_{r,\varphi}|_{r \leq r_{min}} = 0,$$

где r_{min} – радиус вышеуказанной центральной области.

Введем значения пространственных переменных в узлах сетки по правилу: $x^i = -R + i \cdot \Delta x$ и $y^j = -R + j \cdot \Delta y$, где Δx и Δy – шаги сетки, R – характерный размер области, а i и j – индексы, принимающие значения в диапазоне $0 \leq i \leq N-1$, $0 \leq j \leq M-1$, $\Delta x = \frac{2R}{N-1}$, $\Delta y = \frac{2R}{M-1}$. Поставим в соответствие величинам компонент магнитного поля в моменты времени t и $t + \Delta t$ следующие сеточные значения:

$$\begin{aligned} B_r(t) &\rightarrow B_{r_0}^{i,j}; \\ B_\varphi(t) &\rightarrow B_{f_0}^{i,j}; \\ B_r(t + \Delta t) &\rightarrow B_r^{i,j}; \\ B_\varphi(t + \Delta t) &\rightarrow B_f^{i,j}. \end{aligned}$$

Сеточные значения функции на следующем шаге можно вычислить так (подобный подход обеспечивает первый порядок по времени и второй по пространству):

$$\begin{aligned} B_r^{i,j} &= \left(-\alpha^{i,j} \pi \cdot B_{f_0}^{i,j} - \frac{\eta \pi^2 B_{r_0}^{i,j}}{4h^2} \right) \cdot \Delta t + B_{r_0}^{i,j} + \\ &+ \Omega^{i,j} \cdot \left(-y^j \cdot \frac{B_{r_0}^{(i+1),j} - B_{r_0}^{(i-1),j}}{2 \cdot \Delta x} + x^i \cdot \frac{B_{r_0}^{i,(j+1)} - B_{r_0}^{i,(j-1)}}{2 \cdot \Delta y} \right) \cdot \Delta t + \\ &+ \eta \cdot \left(\frac{B_{r_0}^{(i+1),j} - 2 \cdot B_{r_0}^{i,j} + B_{r_0}^{(i-1),j}}{\Delta x^2} + \frac{B_{r_0}^{i,(j+1)} - 2 \cdot B_{r_0}^{i,j} + B_{r_0}^{i,(j-1)}}{\Delta y^2} - \frac{B_{r_0}^{i,j}}{(r^{i,j})^2} - \right. \\ &- \left. \left(-y^j \cdot \frac{B_{f_0}^{(i+1),j} - B_{f_0}^{(i-1),j}}{2 \cdot \Delta x} + x^i \cdot \frac{B_{f_0}^{i,(j+1)} - B_{f_0}^{i,(j-1)}}{2 \cdot \Delta y} \right) \cdot \frac{2}{(r^{i,j})^2} \right) \cdot \Delta t \\ B_f^{i,j} &= - \frac{\Omega \cdot r^{i,j}}{\sqrt{\left(1 + \frac{(r^{i,j})^2}{r_0^2} \right)^3}} \cdot B_{r_0}^{i,j} \cdot \Delta t - \frac{\eta \pi^2 B_{f_0}^{i,j}}{4h^2} \cdot \Delta t + B_{f_0}^{i,j} + \\ &+ \Omega^{i,j} \cdot \left(-y^j \cdot \frac{B_{f_0}^{(i+1),j} - B_{f_0}^{(i-1),j}}{2 \cdot \Delta x} + x^i \cdot \frac{B_{f_0}^{i,(j+1)} - B_{f_0}^{i,(j-1)}}{2 \cdot \Delta y} \right) \cdot \Delta t + \\ &+ \eta \cdot \left(\frac{B_{f_0}^{(i+1),j} - 2 \cdot B_{f_0}^{i,j} + B_{f_0}^{(i-1),j}}{\Delta x^2} + \frac{B_{f_0}^{i,(j+1)} - 2 \cdot B_{f_0}^{i,j} + B_{f_0}^{i,(j-1)}}{\Delta y^2} - \frac{B_{f_0}^{i,j}}{(r^{i,j})^2} + \right. \\ &+ \left. \frac{2}{(r^{i,j})^2} \cdot \left(-y^j \cdot \frac{B_{r_0}^{(i+1),j} - B_{r_0}^{(i-1),j}}{2 \cdot \Delta x} + x^i \cdot \frac{B_{r_0}^{i,(j+1)} - B_{r_0}^{i,(j-1)}}{2 \cdot \Delta y} \right) \right) \cdot \Delta t \end{aligned}$$

Выше использованы следующие значения коэффициентов:

$$r^{i,j} = \sqrt{(x^i)^2 + (y^j)^2};$$

$$\Omega^{i,j} = \Omega(r^{i,j});$$

$$\alpha^{i,j} = \frac{\alpha_0 r_0}{h r^{i,j}} \left(1 - \frac{(Br_0^{i,j})^2 + (Bf_0^{i,j})^2}{B_0^2} \right).$$

Граничные условия будут соответствовать обращению компонент поля в нуль при $r^{i,j} \geq R$ и при $r^{i,j} \leq r_{min}$.

Применяемая нами численная схема хорошо распараллеливается, хотя и обладает рядом недостатков, в том числе условной сходимостью. Тем не менее, вышеупомянутая проблема успешно решается благодаря использованию вычислительных возможностей GPU. Использование видеокарт позволяет увеличить вычислительную мощность в несколько десятков раз.

С целью минимизировать непредвиденные сбои на видеокарте при расчете магнитного поля в каждой точке галактики вместо двумерных массивов используются одномерные Br_n и Bf_n . Таким образом, номер каждого элемента в таком одномерном массиве будет записываться через соответствующие индексы элемента из двумерного массива:

$$n = i + N \cdot j$$

Теперь аналитически оценим выигрыш в вычислительной мощности (K) в случае использования видеокарты. Для сравнения рассматриваются видеокарта GPU GTX 660 и процессор Intel i7. Верхнюю априорную оценку даваемой выгоды (важно учитывать, что она является оценкой «с большим запасом») можно провести, воспользовавшись формулой:

$$K = \frac{1024 \cdot \omega_{GPU}}{\omega_{CPU}},$$

где ω_{GPU} и ω_{CPU} - тактовая частота процессора на видеокарте и на ЦП соответственно. Согласно оценке, $K \approx 87$. Отметим также, что не только тактовая частота играет существенную роль в оценке преимуществ параллельного подхода. Существенную роль также играют другие нюансы, связанные с более медленным выполнением ряда операций на видеокарте, поэтому на деле данная оценка актуальна скорее в смысле порядка величины, а более точно величину K необходимо вычислять опытным путем.

Время работы программы на некоторых из использованных нами видеокарт представлены в Табл. 1. Данные получены для значений $t=8$ млрд. лет.

Табл. 1. Время расчета задачи на GPU и CPU

Тип процессора	CPU Intel i7-	GPU GTX 660	GPU Titan Black
Время расчета (сетка 200x200), с	8357	297	103
Время расчета (сетка 400x400), с	31976	895	174
Время расчета (сетка 800x800), с	110214	3486	795

Для начала рассмотрим начальные условия неоднородные по радиальному направлению:

$$B_\varphi = B_0 \frac{r}{10} \left(1 - \frac{r}{10} \right) \left(\frac{r}{10} - \frac{1}{2} \right)$$

$$B_r = 0$$

Предполагается, что инверсии по радиальному направлению не вырождаются со временем по мере вращения галактического диска. Результаты работы программы представлены на рис. 1.

Для полноты картины рассмотрим такое начальное поле, которое будет содержать в себе как азимутальные, так и радиальные неоднородности:

$$B_\varphi = B_0 \frac{r}{10} \left(1 - \frac{r}{10} \right) \left(\frac{r}{10} - \frac{1}{2} \right) \sin \varphi$$

$$B_r = B_0 \left(-\frac{r^2}{300} + \frac{r^3}{4000} + \frac{r}{40} - \frac{r^2}{600} \right) \cos \varphi$$

Результат эволюции поля, представленный для 12 миллиардов лет, указывает на соответствие наших теоретических предположений действительности: азимутальные неоднородности не являются устойчивыми и в конечном счете вырождаются (рис. 2).

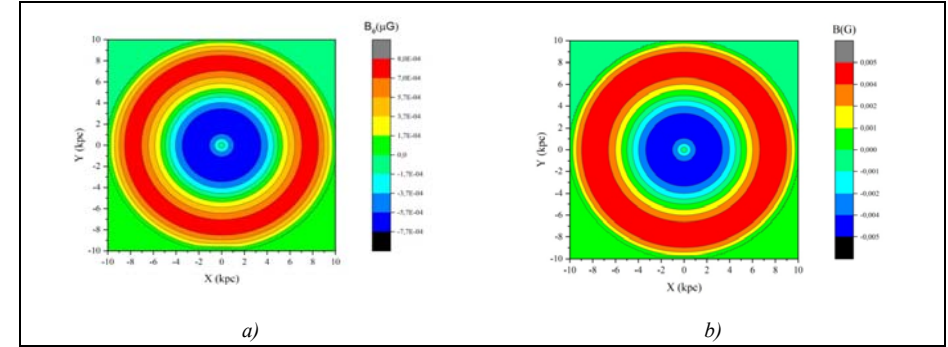


Рис. 1. Начальное распределение (a) и результат эволюции поля (b) с радиальными инверсиями
Fig. 1. Initial distribution (a) and the result of evolution (b) of the field with radial reversals

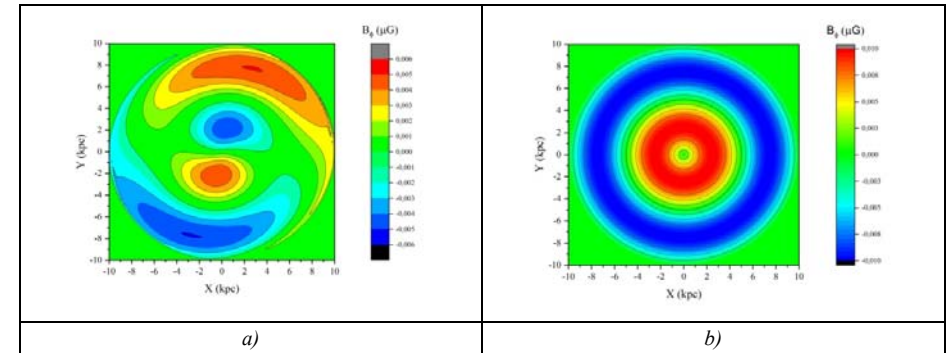


Рис. 2. Начальное распределение (a) и результат эволюции поля (b) с азимутальными и радиальными инверсиями
Fig. 2. Initial distribution (a) and the result of evolution (b) of the field with both radial and angular reversals

4. Выводы

Результаты расчетов галактического магнитного поля подтвердили изначальные предположения об азимутальных и радиальных инверсиях поля. Согласно графикам, любая азимутальная неоднородность склонна к сглаживанию со временем. При этом численный эксперимент подтвердил устойчивость радиальных инверсий, что отчетливо видно на графике с результатами эволюции поля, в котором присутствуют радиальные неоднородности. Таким образом, можно сделать вывод о неустойчивости азимутальных и устойчивости радиальных инверсий, на что указывали и более ранние работы [6][20].

Список литературы / References

- [1] Krause F., Rädler K.-H. Mean-Field Magnetohydrodynamics and Dynamo. Pergamon, 1980, 271 p.
- [2] Соколов Д.Д. Проблемы магнитного динамо. Успехи физических наук, том 185, no. 6, 2015 г., стр. 643-648 / Sokoloff D.D. Problems of magnetic dynamo. Physics-Uspekhi, vol. 58, no. 6, pp/ 601-605.
- [3] Степанов Р.А., Фрик П.Г., Соколов Д.Д. Сопряжение уравнений динамо средних полей и каскадной модели турбулентности в проблеме галактического динамо. Вычислительная механика сплошных

- сред, том. 1, no. 4, 2008 г., стр. 97-108 / Stepanov R., Frick P., Sokoloff D. Coupling of mean-field equation and shell model of turbulence in the context of galactic dynamo problem. *Computational Mechanics of Continuous Media*, vol. 1, no. 4, 2008, pp. 97-108 (in Russian).
- [4] Михайлов Е.А. Спектральное разложение решения задачи о генерации магнитных полей галактик в планарном приближении. Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия, no. 5, 2020 г., стр. 39-44 / Mikhailov E.A. The spectral decomposition of the solution of the problem of generating galactic magnetic fields in the no-z approximation. *Moscow University Physics Bulletin*, vol. 75, no. 5, pp. 420-426.
- [5] Mikhailov E.A. Symmetry of the magnetic fields in galactic dynamo and the material arms. *Magnetohydrodynamics*, vol. 56, no. 4, 2020, pp. 303-315.
- [6] Mikhailov E., Boneva D., Pashentseva M. No-z model for magnetic fields of different astrophysical objects and stability of the solutions. *Data*, vol. 6, no. 1, article no. 4.
- [7] Михайлов Е.А. Задачи с малым параметром и распространение фронтов в теории галактического динамо. Вестник Московского университета. Сер.3. Физика. Астрономия, no. 2, 2015 г., стр. 27-31 / Mikhailov E.A. Problems with a small parameter and propagation of fronts in the galactic dynamo theory. *Moscow University Physics Bulletin*, vol. 70, no. 2, 2015, pp. 101-106.
- [8] Moss D., Stepanov R. et al. Multiscale magnetic fields in spiral galaxies: evolution and reversals. *Astronomy and Astrophysics*, vol. 537, 2012, article no. 68.
- [9] Beck R., Brandenburg A. et al. Galactic Magnetism: Recent Developments and Perspectives. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, vol. 34, 1996, pp.155-206.
- [10] Arshakian T.G., Beck R. et al. Evolution of magnetic fields in galaxies and future observational tests with the Square Kilometre Array. *Astronomy and Astrophysics*, vol.494, no. 1, 2009, pp. 21-32.
- [11] Moss D. On the generation of bisymmetric magnetic field structures in spiral galaxies by tidal interactions. *Monthly Notices of Royal Astronomical Society*, vol. 275, issue 1, 1995, pp. 191-194.
- [12] Нефедов, Н.Н. Общая схема асимптотического исследования устойчивых контрастных структур. Нелинейная динамика, том 6, no. 1, 2010 г., стр. 181-186 / Nefyodov N.N. General scheme of asymptotic investigation of stable contrast structures. *Nonlinear Dynamics*, vol. 6, no. 1, 2010, pp. 181-186 (in Russian).
- [13] Божевольнов Ю. В., Нефедов Н. Н. Движение фронта в параболической задаче реакция — диффузия // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2010. — Т. 50, № 2. — С. 276–285.
- [14] Morris D., Berge G. Direction of the galactic magnetic field in the vicinity of the Sun. *Astrophysical Journal* vol. 139, 1964, pp. 1388–1392.
- [15] Manchester R. Pulsar rotation and dispersion measures and the galactic magnetic field. *Astrophysical Journal*, vol. 172, 1973, pp. 43-52.
- [16] Beck R. Magnetic fields in spiral galaxies. *Astronomy and Astrophysics Review*, vol. 24, 2015, article no. 4.
- [17] Oppermann, N., Junklewitz. et al. An improved map of the galactic Faraday sky. *Astronomy and Astrophysics*, vol. 542, 2012, article no. A93.
- [18] C. Horrelou, R. Beck et al. Faraday effects in the spiral galaxy M51. *Astronomy and Astrophysics*. vol. 265, 1992, pp. 417-428.
- [19] Frick, P., Stepanov, R. et al. Magnetic and gaseous spiral arms in M83. *Astronomy and Astrophysics*. vol. 585, 2016, article no. A21.
- [20] Van Eck C.L., Brown J.C. et al. Modeling the magnetic field in the galactic disk using new rotation measure observations from the Very Large Array. *Astrophysical Journal*, vol. 728, no. 2, 2011, article no 97.
- [21] Андреасян Р.Р., Михайлов, Е.А., Андреасян А.Р. Структура и особенности формирования инверсий галактического магнитного поля. *Астрономический журнал*, том 97, no. 3, 2020 г., стр. 179-189 / Andreasyan R.R., Mikhailov E.A., Andreasyan H.R. Structure and features of the galactic magnetic-field reversals formation. *Astronomy Reports*, vol. 64, no. 3, 2020, pp. 189-198.
- [22] Mikhailov E., Khasaeva T. Evolution of the magnetic field reversals in galaxies. *Bulgarian Astronomical Journal*, vol.31, 2019, pp. 39-50.
- [23] Ивочкин Ю.П., Виноградов Д.А., Тепляков И.О. Численный расчет магнитного поля с использованием технологии CUDA применительно к моделированию электровихревых течений. Математическое и программное обеспечение систем в промышленной и социальной сферах, no. 2, 2015 г, стр. 13-18 / Ivochkin Y.P., Vinogradov D.A., Teplyakov I.O. Numerical calculation of magnetic

field with CUDA technology applied to flow modelling electric vortex flows. *Software of Systems in the Industrial and Social Fields*, no. 2, 2015, pp. 13-18 (in Russian).

- [24] Munshi, A., Gaster B.R. et al. *OpenCL Programming Guide*. Addison-Wesley Professional, 2011, 646 p.
- [25] Kalling R.C., Evans T.E. et al. Accelerating the numerical simulation of magnetic field lines in tokamaks using the GPU. *Fusion Engineering and Design*, vol. 86, no. 4-5, 2011, pp. 399-406.

Информация об авторах / Information about authors

Евгений Александрович МИХАЙЛОВ – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник. Сфера научных интересов: магнитная гидродинамика, теория динамо, галактический магнетизм, уравнения со случайными коэффициентами, распространение фронтов в нелинейных задачах.

Evgeni Aleksandrovich MIKHAILOV – Candidate of physical and mathematical sciences, senior researcher. Research interests: magnetohydrodynamics, dynamo theory, galactic magnetism, equations with random coefficients, distribution of transition layers in nonlinear problems.

Татьяна Тимуровна ХАСАЕВА – студентка второго курса магистратуры кафедры математики физического факультета. Научные интересы: магнитная гидродинамика, космический магнетизм, вычисления на видеокартах.

Tatiana Timurovna KHASAEVA – second-year Master’s student of the department of mathematics of faculty of physics. Research interests: magnetohydrodynamics, cosmic magnetism, modeling on GPU.

Игорь Олегович ТЕПЛЯКОВ – кандидат технических наук, старший научный сотрудник. Научные интересы: магнитная гидродинамика, теплообмен, численные методы.

Igor Olegovich TEPLYAKOV – Candidate of technical sciences, senior researcher. Research interests: magnetohydrodynamics, heat and mass transfer, numerical methods.