



## Математическое моделирование гидродинамических процессов в прибрежной акватории Японского моря

<sup>1,2</sup> *Е. В. Амосова, ORCID: 0000-0003-2154-5010 <el\_amosova@mail.ru>*  
<sup>1,2</sup> *К. С. Кузнецов, ORCID: 0000-0002-8204-6138 <kuznetsovks17@gmail.com>*  
<sup>2</sup> *В. С. Лемешев, ORCID: 0000-0002-9705-9388 <lemeshev.vs.306@gmail.com>*

<sup>1</sup> *Институт прикладной математики ДВО РАН,  
690041, Россия, г. Владивосток, ул. Радио, д. 7*  
<sup>2</sup> *Дальневосточный Федеральный Университет,  
690922, Россия, г. Владивосток, о. Русский, п. Аякс, 10*

**Аннотация.** Представлена трехмерная математическая модель динамики прибрежных вод в заливе Петра Великого Японского моря. Система уравнений Навье-Стокса записана в предположении гидродинамического приближения неоднородной жидкости учитывает, турбулентный обмен, ветровые напряжения, силы трения, сложный рельеф дна и береговой линии. На основе гидрографической информации используется численный метод восстановления рельефа дна и береговой линии. Уравнение свободной поверхности воды заменяется сингулярно возмущенной задачей. В прикладном программном пакете FreeFem++ написан код для расчёта гидродинамических характеристик прибрежной акватории. В ходе решения сетка конечных элементов строится автоматически, параметры сетки задаются пользователем. Для решения сингулярной задачи на каждом временном слое происходит адаптация сетки вокруг численного решения с параметрами адаптации сетки.

**Ключевые слова:** математическое моделирование; метод конечных элементов; уравнения мелкой воды; FreeFem++

**Для цитирования:** Амосова Е.В., Кузнецов К.С., Лемешев В.С. Математическое моделирование гидродинамических процессов в прибрежной акватории Японского моря. Труды ИСП РАН, том 34, вып. 5, 2022 г., стр. 227-242. DOI: 10.15514/ISPRAS-2022-34(5)-16

**Благодарности:** Работа выполнена при финансовой поддержке ДВФУ (Программа стратегического академического лидерства «Приоритет-2030»: Центр цифрового развития).

### Mathematical modeling of hydrodynamic processes in the coastal waters of the Sea of Japan

<sup>1,2</sup> *E. V. Amosova, ORCID: 0000-0003-2154-5010 <ev\_amosova@mail.ru>*  
<sup>1,2</sup> *K. S. Kuznetsov, ORCID: 0000-0002-8204-6138 <kuznetsovks17@gmail.com>*  
<sup>2</sup> *V. S. Lemeshev, ORCID: 0000-0002-9705-9388 <lemeshev.vs.306@gmail.com>*

<sup>1</sup> *Institute of Applied Mathematics of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences,  
7 Radio st., Vladivostok, Russia, 690041*  
<sup>2</sup> *Far Eastern Federal University,  
10 Ajax Bay, Russky Island, Vladivostok, Russia, 690922*

**Abstract.** A three-dimensional mathematical model of coastal water dynamics in the Peter the Great Bay of the Sea of Japan is presented. The system of Navier-Stokes equations is written under the assumption of a hydrodynamic approximation of an inhomogeneous fluid and takes into account turbulent exchange, wind

stresses, friction forces, complex topography of the bottom and coastline. On the basis of hydrographic information, a numerical method is used to reconstruct the bottom topography and coastline. The free water surface equation is replaced by a singularly perturbed problem. In the FreeFem++ application software package, a code was written for calculating the hydrodynamic characteristics of coastal waters. During the solution, the finite element mesh is built automatically, the mesh parameters are set by the user. To solve the singular problem, at each time layer, the grid is adapted around the numerical solution with the grid adaptation parameters.

**Keywords:** math modeling; finite element method; shallow water equations; FreeFem++

**For citation:** Amosova E.V., Kuznetsov K.S., Lemeshev V.S. Mathematical modeling of hydrodynamic processes in the coastal waters of the Sea of Japan. *Trudy ISP RAN/Proc. ISP RAS*, vol. 34, issue 5, 2022, pp. 227-242 (in Russian). DOI: 10.15514/ISPRAS-2022-34(5)-16

**Acknowledgements.** This work was supported by Far Eastern Federal University (or FEFU) (Program "PRIORITY 2030": Digital Science).

### 1. Введение

Проблема негативного антропогенного влияния на водную среду, и, как следствие, загрязнение морских зон в результате хозяйственной деятельности человека, является актуальной на сегодняшний день. Особо остро она стоит в приморских регионах, где количество акваторий больше, чем в континентальных районах страны. Одним из важных с экономической точки зрения регионов является Дальний Восток. В последнее время из-за роста добывающей и обрабатывающей промышленности в прибрежной зоне проводятся многие виды работ, таких как строительство буровых платформ, ремонтные и восстановительные работы в портовых территориях, дноуглубительные работы при строительстве, прокладка различных трубопроводов. Вследствие этого выброс загрязняющих веществ в море возрастает.

Для снижения уровня загрязнения необходима точная оценка воздействия деятельности человека на гидросферу. Прогнозирование формирования фронта загрязнения и его распространение – задача, решение которой заключается в грамотном моделировании процессов, происходящих при проведении работ в акваториях. Исследование данной проблемы и моделирование распространения загрязняющих веществ представляют большой интерес и активно развиваются.

Для сохранения биоресурсов и проведения восстановительных мероприятий, призванных улучшить экологическую обстановку, разработана нормативно-правовая база [1-3]. Однако, для прогнозирования качества окружающей среды, требуется проведение математического моделирования процессов распространения загрязнений в акваториях.

На данный момент известно большое число различных математических моделей, описывающих процессы переноса в водоемах и подземных водах. Многие отечественные и иностранные ученые посвятили свои труды проблематике моделирования распространения взвесей [4-10]. Однако, несмотря на очевидную актуальность и длительное исследование проблемы, не существует единой модели, описывающей все возможные сценарии распространения загрязняющей массы в различных акваториях. Связано это с особенностями рассматриваемого региона, геометрией загрязнения, различной степенью влияния факторов на распространение загрязнения и сложностью моделирования процесса турбулентности, который в свою очередь так же не имеет единой методики описания.

В работе представлено математическое моделирование гидродинамических процессов в прибрежных водах Японского моря, основанное на трехмерных уравнениях Навье-Стокса, учитывающих гидростатическое приближение. Изменения температуры и солёности морской воды описываются похожими уравнениями диффузии. В них через балансы тепла и влаги учитывается влияние атмосферы, которое распространяется от поверхности в толщу

воды, и особенно заметно от сезона к сезону. При изучении плотностной устойчивости вод и их циркуляции учитывается совместное влияние как температуры, так и солености. Действие внутренних источников и стоков тепла за счет фазовых преобразований воды и диссипации механической энергии незначительно. Наиболее существенно на изменение температуры влияет испарение воды. Это поверхностный процесс, поэтому он учитывается не в уравнении теплопроводности, а в уравнении теплового баланса поверхности океана, которое используется в качестве одного из граничных условий к уравнению теплопроводности. Уравнение баланса соли поверхности океана представляет собой сумму потоков соли, обусловленных притоком или оттоком массы пресной воды за счет осадков на границе и испарением. Считая, что вклад теплового потока от дна незначителен, на дне водоема задаются значения солености и температуры, соответствующие значениям на данных уровнях морской акватории. Потоки соли на дне водоема отсутствуют. Данные для начальных условий рассчитываются из соответствующей стационарной модели. На основе гидрографической информации используется численный метод восстановления рельефа дна и береговой линии, что важно для прибрежных районов.

## 2. Постановка задачи

Задачи рассматривается в трехмерной ограниченной области. Граница области состоит из двух горизонтальных поверхностей: дно акватории  $h(x, y) > 0$  и свободная поверхность – функция  $\xi(x, y, t)$  определяется в процессе решения, вертикальная граница содержит участок входа воды в область  $\Gamma_{in}$ , на котором задается вектор скорости, равный скорости дрейфового потока и уровень воды, соответствующий уровню прилива или отлива. На оставшейся части границы задаются условия либо трения стенки, либо условия непроницаемости.

Пусть  $Q \subset R^3$  – ограниченная область,  $\partial Q$  – граница области, такая что  $\partial Q = \Omega_h \cup \Omega_\xi \cup \Gamma$ , где

$$\Omega_h = \{(x, y): z = -h(x, y)\}, \quad \Omega_\xi = \{(x, y): z = \xi(x, y, t)\}.$$

Вертикальная граница  $\Gamma = \Gamma_{in} \cup \Gamma_{out}$ . Под  $\Gamma_{in}$  будем понимать границу входа, под  $\Gamma_{out}$  – свободную границу. Область изменений переменных  $(x, y)$  для каждого  $z$  обозначим через  $\Omega$ , тогда  $Q = \Omega \times [-h, \xi(t)]$ .

Пусть  $\mathbf{v} = \{u(x, y, z, t); v(x, y, z, t); w(x, y, z, t)\}$  – вектор скорости движения рассматриваемой среды,  $p = p(x, y, z, t)$  – давление среды,  $\rho = \rho(x, y, z, t)$  – плотность среды,  $T = T(x, y, z, t)$  – температура среды,  $S = S(x, y, z, t)$  – соленость среды.

Под осредненным по вертикали значением некоторой функции  $f$  будем понимать следующее выражение:

$$\bar{f}(x, y, t) = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\xi} f(x, y, z, t) dz, \quad (1)$$

где

$$H(x, y, t) = h(x, y) + \xi(x, y, t). \quad (2)$$

Из-за турбулентного характера движения морской воды нет практического смысла находить мгновенные значения характеристик среды. Обычно проводят осреднение искомым величин в некотором диапазоне времени. В результате операции осреднения по времени трехмерные уравнения движения, записанные в гидростатическом приближении [11], уравнение несжимаемости, температуры и солености примут следующий вид [11]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + K \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu_t \frac{\partial u}{\partial z} \right) + f_c v, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + K \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu_t \frac{\partial v}{\partial z} \right) - f_c u, \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= -\rho g, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} &= K_T \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu_t \frac{\partial T}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} + w \frac{\partial S}{\partial z} &= K_S \left( \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu_t \frac{\partial S}{\partial z} \right), \\ (x, y) \in \Omega, \quad -h(x, y) &\leq z \leq \xi(x, y, t). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $g$  – ускорение свободного падения,  $f_c$  – параметр Кориолиса,  $\rho_0$  – среднее значение плотности морской воды. Плотность среды  $\rho$  определяется по температуре и солености жидкой среды. Для расчета принята формула, полученная из уравнения состояния по форме О. И. Мамаева:

$$\rho = \rho_0 (1 - \alpha_1 T - b_1 T^2 + c_1 S - d_1 TS) \quad (4)$$

где

$$\rho_0 = 1.00007, \quad \alpha_1 = 0.3449 \cdot 10^{-5}, \quad b_1 = 0.4689 \cdot 10^{-5}, \quad c_1 = 80.1943 \cdot 10^{-5}, \\ \alpha_1 = 0.2000 \cdot 10^{-5}.$$

Уравнение для давления разрешается следующим образом:

$$p = P_a + g \rho_0 \xi + g \int_0^z \rho dz', \quad (x, y) \in \Omega, \quad -h(x, y) \leq z \leq 0. \quad (5)$$

При моделировании коэффициента турбулентности учитывается анизотропность турбулентного обмена. Вследствие преобладания горизонтального масштаба над вертикальным, несущественна роль горизонтальной турбулентной вязкости в сравнении с вертикальной. Достаточно малый масштаб вертикального разрешения области позволяет использовать формулу Смагоринского для расчета вертикального коэффициента турбулентности:

$$\mu_t = (C_s \Delta)^2 s^2, \quad s = 2s_{ij} \cdot s_{ij}, \quad (6)$$

где  $s_{ij}$  – осредненный тензор скоростей деформаций,  $C_s$  – безразмерная эмпирическая константа,  $\Delta$  – характерный масштаб сетки,  $\nu_t = \mu_t$ . В работе приняты значения горизонтального коэффициента турбулентности и коэффициента диффузии равными,  $K_T = K = 10^3 \text{ м}^2/\text{с}$ .

Из закона сохранения массы для конечного объема в каждый момент времени, учитывая (1) и (2), получим уравнение для определения функции уровня поверхности:

$$\frac{\partial(\bar{\rho}H)}{\partial t} + u \frac{\partial(\bar{\rho}H)}{\partial x} + v \frac{\partial(\bar{\rho}H)}{\partial y} + w \frac{\partial(\bar{\rho}H)}{\partial z} + \bar{\rho}H \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) = 0, \quad (x, y) \in \Omega. \quad (7)$$

Система уравнений (2) – (7) рассматривается при следующих граничных условиях.

На поверхности акватории  $\Omega_\xi$  учитываются ветровые напряжения  $\mathbf{St}$ , которые описываются с помощью квадратичного закона изменения скорости ветра

$$\mathbf{St} = -\frac{\rho_a}{\rho_0} C_d \mathbf{W} |\mathbf{W}|,$$

где  $\rho_a$  – плотность ветра,  $\mathbf{W}$  – вектор-скорости ветра на уровне 10 м над свободной поверхностью,  $C_d$  – коэффициент трения, который определяется следующим образом:

$$C_d = \begin{cases} 0.564 \cdot 10^{-3}, & \text{если } \mathbf{W} \leq 4.917; \\ (-0.12 + 0.13 \cdot \mathbf{W}) \cdot 10^{-3}, & \text{если } 4.917 \leq \mathbf{W} \leq 19.221; \\ 2.514 \cdot 10^{-3}, & \text{если } \mathbf{W} > 19.221. \end{cases}$$

Условия трения на поверхности заданы с помощью тензора напряжений:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (\mu D(\mathbf{v})\mathbf{n} - \mathbf{np}) = -\mathbf{St}, \quad z = \xi(x, y, t). \quad (8)$$

Здесь  $\mathbf{n}$  – вектор внешней нормали,  $D(\mathbf{v})$  – тензор напряжений,  $\mu$  – матрица коэффициентов турбулентности,  $\mu_{ij} = K, i, j = 1, 2, \mu_{i3} = \mu_t, l = 1, 2, 3$ .

На поверхности моря  $z = \xi(x, y, t)$  используется уравнение баланса тепла и соли в безадвективном районе океана:

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial z} n_z = c_v \rho_a C_T |W| (T_g - T_0) + L_u \rho_a C_q |W| (q_g - q_0) + \Phi, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \\ v_s \frac{\partial S}{\partial z} n_z = S_0 \frac{\rho_a}{\rho_0} C_q |W| (q_a - q_0) + \frac{S_0}{\rho_0} \frac{\partial M}{\partial t}, \quad \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial y} = 0. \quad (9)$$

Здесь  $T_0$  – температура на поверхности воды,  $T_g$  – температура окружающей среды,  $q_a$  – удельная влажность воздуха,  $q_0$  – удельная влажность морской воды,  $S_0$  – средняя солёность,  $M(t)$  – масса осадков,  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности соленой воды,  $\lambda = K_T \rho_0 c_v$ ,  $c_v$  – теплоемкость соленой воды,  $C_T = 2.2 \cdot 10^{-3}$ ,  $C_q = 2.7 \cdot 10^{-3}$  – коэффициенты трения,  $\Phi$  – поток тепла, обусловленный радиацией, испарением и турбулентной теплоотдачей.

Напряжения трения на дне акватории  $\Omega_h$  также задается с помощью квадратичного закона трения

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (\mu D(\mathbf{v})\mathbf{n} - \mathbf{np}) = -f_b \mathbf{v} |\mathbf{v}|, \quad z = -h(x, y),$$

где  $f_b$  – коэффициент придонного трения.

В задачах моделирования гидродинамических процессов для определения коэффициента трения часто используется соотношение, из которого следует, что величина коэффициента трения уменьшается с увеличением глубины, что накладывает существенное ограничение применимости данной формулы при моделировании прибрежной бухты. В работе для определения коэффициента трения принята формула

$$f_b = \frac{gn^2}{H_{max}^{4/3}} |\mathbf{v}|,$$

где  $n$  – параметр шерховатости,  $H_{max} = \max_{(x,y) \in \Omega} |h(x, y)|$ .

Для вертикальной составляющей компоненты вектора скорости задается кинематическое условие на дне моря

$$w|_{z=-h(x,y)} = -u(x, y, -h(x, y)) \frac{\partial h}{\partial x} - v(x, y, -h(x, y)) \frac{\partial h}{\partial y}. \quad (10)$$

Значения температуры и солёности на дне акватории соответствуют уровню глубины для данного времени года:

$$T|_{z=-h(x,y)} = T_h(x, y), \quad S|_{z=-h(x,y)} = S_h(x, y).$$

На участке входа  $\Gamma_{in}$  задается уровень поверхности воды (приливы – отливы) и скорость течения:

$$\xi|_{\Gamma_{in}} = \xi_g(t), \quad u|_{\Gamma_{in}} = u_g + u_s(t), \quad v|_{\Gamma_{in}} = v_g + v_s(t), \quad w|_{\Gamma_{in}} = w_g + w_s(t). \quad (11)$$

В качестве стационарной части вектора скорости на входе принимается скорость, найденная из уравнений динамики воды, записанных для установившегося дрейфового течения:

$$\mu_t \frac{\partial^2 u_g}{\partial z^2} = -f_c v_g, \quad \mu_t \frac{\partial^2 v_g}{\partial z^2} = -f_c u_g,$$

с краевыми условиями:

$$-\mu_t \frac{\partial u_g}{\partial z} \Big|_{z=\xi} = \mathbf{St}_x, \quad -\mu_t \frac{\partial v_g}{\partial z} \Big|_{z=\xi} = \mathbf{St}_y, \\ u_g \Big|_{z=-\infty} \neq \infty, \quad v_g \Big|_{z=-\infty} \neq \infty. \quad (12)$$

Компонента  $w_g$  определяется из уравнения неразрывности и условия (10) при значениях компонент вектора скорости  $u = u_g, v = v_g$ .

На свободной границе  $\Gamma_{out}$  считаем, что все потоки либо отсутствуют, либо для скорости задан квадратичный закон трения (8), а тепловые и солевые потоки равны нулю.

В начальный момент времени задан уровень поверхности акватории  $\xi_0$ , по которому определяется условие для выражения  $(\rho H)$  в начальный момент времени:

$$(\rho H)|_{t=0} = \int_{-h}^0 \rho_s dz + \rho_s(x, y, 0) \xi_0, \quad \rho_s = \rho_s(T_0, S_0),$$

где  $T_0, S_0$  – начальное распределение температуры и солёности, при этом

$$T|_{t=0} = T_0(x, y, z), \quad S|_{t=0} = S_0(x, y, z),$$

и вектора-скорости

$$u|_{t=0} = u_0(x, y, z), \quad v|_{t=0} = v_0(x, y, z), \quad w|_{t=0} = w_0(x, y, z). \quad (13)$$

Стационарные характеристики (13) определяются из решения соответствующей стационарной задачи (2) – (12).

### 3. Моделирование области

Поставленная задача решается методом конечных элементов с дискретизацией по времени всех уравнений. Расчёт модели проводится в программном комплексе FreeFem++ методом конечных элементов на заданной прибрежной зоне Японского моря. FreeFem++ – это программа численного решения дифференциальных уравнений в частных производных, является свободно распространяемым программным обеспечением, имеет ограниченно открытую лицензию, основывается на методе конечных элементов и базируется на языке программирования C++. Среда FreeFem++ не включает в себя CAD-систему и не позволяет импортировать геометрию области определения из CAD-систем, поэтому геометрия области определения описывается математическими формулами в самом пакете. В ходе решения сетка конечных элементов строится автоматически, параметры сетки задаются пользователем, возможна адаптация сетки (выбор наиболее подходящего размера элементов для каждой части области определения) для конкретной задачи.

При математическом моделировании гидродинамики морской акватории актуальной является задача обработки гидрографической информации. Глубина водоема и береговая линия прибрежной зоны задаются в отдельных точках. Использование расчетной сетки, построенной на «грубой» геометрии, приводит к локальным всплескам вычисляемых функций и как следствие к большим погрешностям вычислений. Для повышения точности расчетов гидродинамических процессов необходимо приблизить функцию двух переменных, описывающую рельеф дна акватории и береговую линию, более гладкими.

В работе проведен тестовый расчет гидродинамических характеристик для бухты Аякс, расположенной в заливе Петра Великого Японского моря.

На рис. 1 представлен фрагмент карты бухты Аякс залива Петра великого Японского моря с триангуляцией двумерной области, границами которой являются берега бухты. График кусочно-постоянной поверхности, описывающей дно бухты, граница которой построена с помощью одномерной интерполяции по координатам берегов бухты и изолиний соответствующим принятым значениям глубин, представлен на рис. 2.



Рис. 1. Бухта Аякс в заливе Петра Великого Японского моря  
Fig. 1. Ajax Bay in the Gulf of Peter the Great Sea of Japan

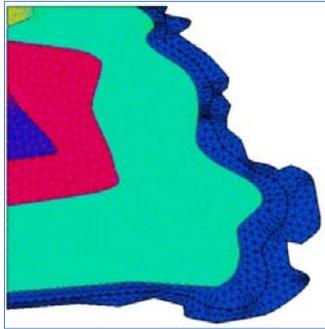


Рис. 2. Поверхность функции дна  
Fig. 2. Bottom function surface

В пакете FreeFem++ предусмотрена процедура построения расчетной сетки в случае трехмерной области послойно. Трехмерная область задается как прямое произведение множеств,  $Q = \Omega \times [z_{min}; z_{max}]$ , где  $z_{min}$ ,  $z_{max}$  – гладкие функции, описывающие соответственно нижнюю и верхнюю границы объема  $Q$ .

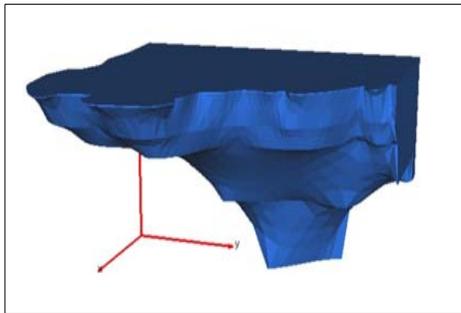


Рис. 3. Трехмерная модель расчетной области  
Fig. 3. 3D model of computational domain

Геометрия модели бухты Аякс Японского моря представлена на рис. 3.

#### 4. Обезразмеривание задачи

Пусть  $t_c, L, H_c, u_c, w_c, T_c, S_c, p_c, \rho_c$  – характерные масштабы времени, горизонтальной и вертикальной координат, горизонтальной и вертикальной скоростей, температуры, солёности, давления, плотности соответственно. Безразмерные величины  $\varphi_b$  введем по формулам:

$$\begin{aligned} t &= t_b t_c, & x &= x_b L, & y &= y_b L, & z &= z_b H_c, \\ v_s &= v_{sb} v_{sc}, & u &= u_b u_c, & v &= v_b u_c, & w &= w_b w_c, & \rho &= \rho_b \rho_c, & p &= p_b p_c, \\ & & & & T &= T_b T_c, & S &= S_b S_c. \end{aligned} \quad (14)$$

Введем следующие безразмерные параметры:

$$Sh = \frac{L}{u_c t_c}, \quad Eu = \frac{\rho_c u_c^2}{p_c}, \quad Ki = \frac{u_c}{f_c L},$$

где  $Sh$  – число Струхалия,  $Eu$  – число Эйлера,  $Ki$  – число Кибеля. Обозначим

$$Pe_L = \frac{Lu_c}{K_T}, \quad Ps_H = \frac{H_c w_c}{v_t}, \quad E_L = \frac{f_c L^2}{K}, \quad E_H = \frac{f_c H_c^2}{\mu_t}, \quad (15)$$

где  $Pe_L, Ps_H$  – числа Пекле для горизонтальной и вертикальной диффузий,  $E_L, E_H$  – числа Экмана для вертикальной и горизонтальной турбулентной вязкости.

Анализ уравнения неразрывности показывает, что произведение величин характерной вертикальной составляющей скорости на характерный горизонтальный масштаб равно произведению величин характерной горизонтальной составляющей скорости на характерный вертикальный масштаб, т. е. характерное значение вертикальной составляющей скорости определяется соотношением

$$w_c = \frac{H_c}{L} u_c. \quad (16)$$

В дальнейшем, при обозначении безразмерных величин  $\varphi_b$  будем опускать индекс  $b$ . Перейдем к обезразмериванию задачи (1) – (13), используя (14) – (16).

Отметим, что исходная система дифференциальных уравнений с частными производными (3), (7) является смешанной и состоит из уравнений параболического и гиперболического типов. Уравнение свободной поверхности воды приводится к параболическому типу с помощью замены уравнения (7) соответствующим параболическим уравнением с малым параметром регуляризации, а из уравнения неразрывности выразим вертикальную составляющую вектора скорости путем интегрирования его по вертикальной координате, учитывая кинематическое условие на дне моря (10).

Запишем безразмерную параболическую систему дифференциальных уравнений с краевыми условиями для определения гидродинамических характеристик среды в заданной акватории.

Уравнения для скорости в безразмерных переменных:

$$\begin{aligned} ShKi \frac{\partial u}{\partial t} + Ki \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= - \frac{Ki}{Eu} \frac{\partial p}{\partial x} + v + \frac{K}{E_L} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\mu_t}{E_H} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \\ ShKi \frac{\partial v}{\partial t} + Ki \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= - \frac{Ki}{Eu} \frac{\partial p}{\partial y} - u + \frac{K}{E_L} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{\mu_t}{E_H} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \\ w &= w|_{z=-h(x,y)} - \int_{-h(x,y)}^z \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz, \quad -h(x,y) < z < \xi(x,y,t). \end{aligned} \quad (17)$$

Безразмерная функция давления определяется из условия

$$p = 1 + \xi \frac{g H_c \rho_c}{p_c} + \frac{g H_c \rho_c}{p_c} \int_z^0 \rho(\zeta) d\zeta, \quad -h(x,y) \leq z \leq 0. \quad (18)$$

где  $h(x, y) > 0$  – функция, аппроксимирующая дно,  $\xi(x, y, t)$  – функция свободной поверхности акватории.

Осреднение по вертикальной координате функций будем проводить по правилу (1). Обозначим через

$$\Psi = H\bar{\rho}, \quad H(x, y, t) = h(x, y) + \xi(x, y, t). \quad (19)$$

Для функции  $\Psi$ , согласно (7), запишем параболическое уравнение с малым параметром регуляризации  $\varepsilon > 0$ :

$$Sh \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \Psi \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) = \varepsilon \Delta \Psi. \quad (20)$$

Уравнения температуры и солёности в безразмерной постановке имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} Sh \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} &= \frac{K_T}{Pe_L} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \frac{v_t}{PS_H} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \\ Sh \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} + w \frac{\partial S}{\partial z} &= \frac{K_T}{Pe_L} \left( \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \right) + \frac{v_t}{PS_H} \frac{\partial^2 S}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (21)$$

Из формулы (6) в силу малости градиентов вертикальной компоненты вектора скорости, пренебрегая горизонтальными градиентами скорости, получим следующее выражение:

$$\mu_t = C_s^2 h_z^2 \frac{u_c}{2} \sqrt{\left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2}, \quad C_s = 0.2,$$

где  $h_z$  – шаг сетки в направлении оси  $Oz$ .

Получим выражения для краевых условий, записанных в безразмерном виде.

Пренебрегая изменением горизонтальных градиентов вектора скорости, запишем условия на поверхности акватории  $z = \xi(x, y, t)$ ,  $(x, t) \in \Omega$  для вектора скорости в виде

$$\begin{aligned} \frac{\mu_t}{E_H} \frac{\partial u}{\partial z} n_z - \frac{L Ki}{H_c Eu} p n_x &= \frac{C_d}{H_c f_c u_c} \frac{\rho_a}{\rho_0} W_x |\mathbf{W}|, \\ \frac{\mu_t}{E_H} \frac{\partial v}{\partial z} n_z - \frac{L Ki}{H_c Eu} p n_y &= \frac{C_d}{H_c f_c u_c} \frac{\rho_a}{\rho_0} W_y |\mathbf{W}|, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Условия для температуры и солёности на поверхности акватории  $z = \xi(x, y, t)$ ,  $(x, t) \in \Omega_\xi$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{PS_H} \frac{\partial T}{\partial z} &= c_v \rho_a C_T \frac{|\mathbf{W}|}{w_c} (T_g - T_0) + L_u \rho_a C_q \frac{|\mathbf{W}|}{w_c} (T_g - T_0) + \frac{\Phi}{w_c}, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \\ \frac{v_t}{PS_H} \frac{\partial S}{\partial z} &= \frac{S_0 \rho_a |\mathbf{W}|}{S_c \rho_0 w_c} C_q (q_a - q_0) + \frac{S_0}{S_c \rho_0 w_c} \frac{\partial M}{\partial t}, \quad \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial y} = 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим граничные условия на поверхности дна акватории при  $z = -h(x, y)$ ,  $(x, t) \in \Omega_h$  после обезразмеривания:

$$\begin{aligned} \frac{\mu_t}{E_H} \frac{\partial u}{\partial z} n_z - \frac{L Ki}{H_c Eu} p n_x &= -\frac{b_f u_c}{H_c f_c} u \sqrt{u^2 + v^2 + \frac{(w_c w)^2}{u_c^2}}, \\ \frac{\mu_t}{E_H} \frac{\partial v}{\partial z} n_z - \frac{L Ki}{H_c Eu} p n_y &= -\frac{b_f u_c}{H_c f_c} v \sqrt{u^2 + v^2 + \frac{(w_c w)^2}{u_c^2}}, \\ w|_{z=-h(x,y)} &= -u|_{z=-h(x,y)} \frac{\partial h}{\partial x} - v|_{z=-h(x,y)} \frac{\partial h}{\partial y}, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0, \\ T|_{z=-h} &= T_h(x, y), \quad S|_{z=-h} = S_h(x, y), \quad (x, y) \in \Omega. \end{aligned} \quad (23)$$

На участке границы входа  $\Gamma_{in}$  задается уровень поверхности воды (приливы – отливы) и скорость течения (13), тепловые потоки и поток массы соли равны нулю. В качестве вектора скорости на входе принимается скорость, найденная из безразмерных уравнений динамики воды, записанных для установившегося дрейфового течения:

$$\frac{\mu_t}{E_H} \frac{\partial^2 u_g}{\partial z^2} = -v_g, \quad \frac{\mu_t}{E_H} \frac{\partial^2 v_g}{\partial z^2} = u_g, \quad (x, y) \in \Gamma_{in},$$

с краевыми условиями:

$$\begin{aligned} \frac{\mu_t}{E_H} \frac{\partial u_g}{\partial z} \Big|_{z=\xi} &= \frac{\rho_a C_d}{\rho_0 u_c f_c H_c} W_x |\mathbf{W}|, \quad \frac{\mu_t}{E_H} \frac{\partial v_g}{\partial z} \Big|_{z=\xi} = \frac{\rho_a C_d}{\rho_0 u_c f_c H_c} W_y |\mathbf{W}|, \quad (x, y) \in \Gamma_{in}, \\ u_g \Big|_{z=-\infty} &\neq \infty, \quad v_g \Big|_{z=-\infty} \neq \infty. \end{aligned} \quad (24)$$

Для определения уровня поверхности воды участке границы входа  $\Gamma_{in}$  получим выражение

$$\Psi|_{\Gamma_{in}} = \int_{-h}^0 \rho dz + \xi_0, \quad \rho = \rho(T, S), \quad (x, y) \in \Gamma_{in}. \quad (25)$$

На свободной границе  $\Gamma_{out}$  считаем, что потоки либо отсутствуют, либо задан квадратичный закон трения, кроме того

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0, \quad (x, t) \in \Gamma_{out}. \quad (26)$$

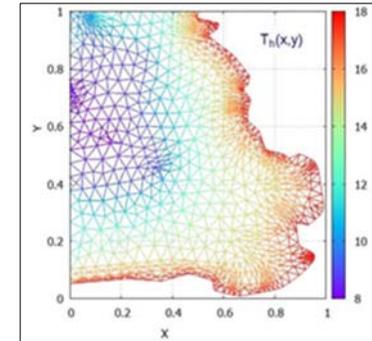


Рис. 4. Распределение поля температур на дне акватории  
Fig. 4. Distribution of the temperature field at the bottom of the water area

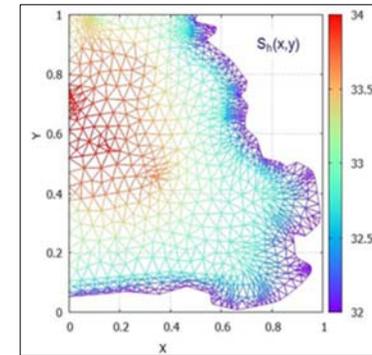


Рис. 5. Распределение диффузии солёности на дне акватории  
Fig. 5. Distribution of salinity diffusion at the bottom of the water area

Начальное распределение поверхности уровня воды, температуры, солености и вектора скорости задано в (13). Для определения значений температуры и солености на дне акватории в поставленной задаче в качестве краевых условий использовались данные измерений соответствующих величин на разных глубинах Тихого океана. Графики поверхностей, описывающих распределение температуры и соли в летний период на дне акватории, представлены на рис.4, 5.

### 5. Вычислительный эксперимент

Поставленная задача решается методом конечных элементов с дискретизацией по времени всех уравнений. Применение неявной схемы и процедуры Ньютона для линеаризации нелинейных слагаемых в уравнениях движения обеспечивает сходимость итерационного процесса на достаточно больших временных шагах.

В качестве характерных значений основных параметров и величин примем следующие значения:

$$t_c = 10^4 \text{ [с]; } L_x = 2000 \text{ [м]; } L_y = 3150 \text{ [м]; } L = 3150 \text{ [м]; } H = 10 \text{ [м];}$$

$$u_c = 1 \text{ [м/с]; } p_c = 1 \text{ [Па]; } \rho_0 = 1024.12 \text{ [кг/м}^3\text{]; } f_c = 10^5 \text{ [с}^{-1}\text{];}$$

$$K = 10^3 \text{ [м}^2\text{/с]; } \nu_t = 10^3 \text{ [м}^2\text{/с]; } K_T = 10^{-1} \text{ [м}^2\text{/с]}.$$

Расчет модели проводится на высокоуровневом мультифизическом программном обеспечении FreeFem++ с конечными элементами на геометрии бухты Аякс Японского моря. Общее время наблюдения 2.7 ч. Сетка по всему объему содержит 17620 конечных элементов. Построенная сетка является неравномерной. В местах далеких от прибрежной линии наибольший объемный размер одного элемента составляет  $157.5 \times 157.5 \times 1 \text{ м}^3$  ближе к линии берега наименьший размер объема элемента не превосходит значений  $0.945 \times 0.945 \times 1 \text{ м}^3$ , шаг по времени соответствует 0.27 ч.

Для решения гиперболического уравнения системы используется параболическая регуляризация с применением обратного метода Эйлера второго порядка для аппроксимации производной по времени. При решении сингулярной задачи (20), (25), (26) с малым параметром регуляризации  $\varepsilon > 0$ , применяется адаптация двумерной сетки вокруг численного решения  $\Psi$ , обновляемая для каждого временного слоя. Управляющими параметрами сетки, определяемые пользователем, являются следующие параметры:

- уровень ошибки интерполяции внутри геометрии  $err = 10^{-5}$ ,
- уровень ошибки интерполяции на границе  $errg = 10^{-2}$ ,
- изотропность метрики  $iso = true$ ,
- максимальное количество вершин, разрешенных в генераторе сетки  $nvbox = 10^7$ ,
- максимальный линейный размер конечного элемента  $hmax = 10^{-2}$ .

Минимальный линейный размер элемента адаптированной сетки для всех итераций составил  $hmin = 0.000308126$ , количество конечных элементов принадлежит диапазону значений от 16811 до 16869. При данных параметрах сетки, параметр регуляризации задачи выбран  $\varepsilon = 10^{-4}$ .

Основными причинами, определяющими скоростную структуру водного потока, являются дрейф водных масс под действием ветра и приливно-отливные колебания уровня воды. При выборе гидрологического сценария предполагалось, что сила ветра над уровнем моря 10 м. равна  $\mathbf{W} = \{7; 9\}$ ,  $|\mathbf{W}| = 11.4 \text{ м/с}$ . Время приливного цикла задано выражениями  $u = u_g + 0.03t$ ,  $v = v_g + 0.03t$ ,  $\xi = -0.3/H + 0.8t/H$ ,  $t \in (0,1)$ , где  $\{u_g; v_g\}$  – дрейфовое течение.

На рисунках 6–9 представлены векторные поля скоростей в акватории бухты Аякс в начальный момент времени и через 2.7 часа. На рис.6, 7 указано направление вектора ветра  $\mathbf{W}$ . На рисунках 6-13 представлены графики безразмерных характеристик на безразмерной

геометрии для действительных значений времени. При дальнейшем увеличении времени для данного гидрологического сценария гидродинамическая картина не меняется.

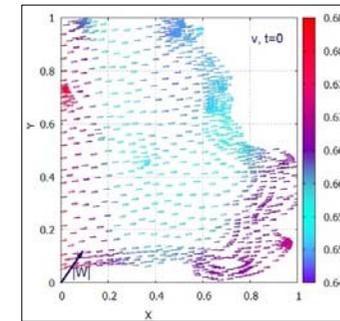


Рис. 6. Поле скоростей на поверхности бухты в начальный момент времени  
Fig. 6. Velocity field on the surface of the bay at the initial moment of time

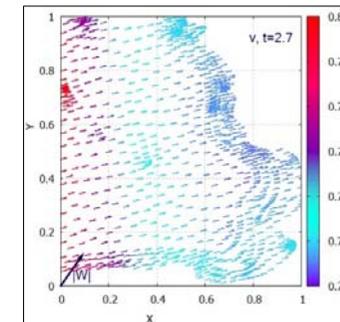


Рис. 7. Поле скоростей на поверхности бухты в моменты времени  $t=2.7$  ч. от начала расчета  
Fig. 7. Velocity field on the surface of the bay at time  $t=2.7$  hours from the beginning of the calculation.

Сравним осредненные по вертикальному направлению значения модуля вектора-скорости  $mod(v) = \sqrt{u^2 + v^2}$  в начальный момент времени и через 2.7 часа после начала расчета. Полученные поверхности модуля скорости представлены на рис. 8, 9.

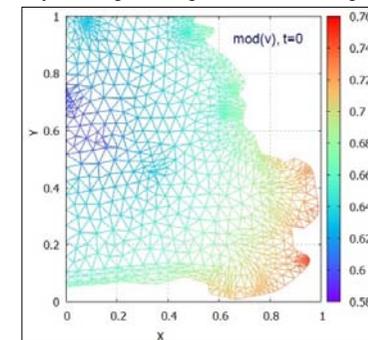


Рис. 8. Распределение осредненного по вертикали модуля вектора скорости в начальный момент времени  
Fig. 8. Distribution of the vertically averaged modulus of the velocity vector at the initial moment of time

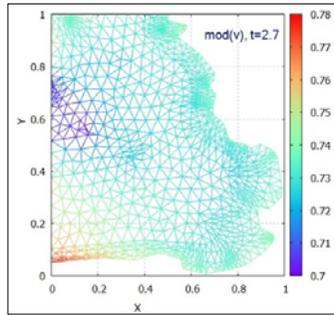


Рис. 9. Распределение осредненного по вертикали модуля вектора скорости в момент времени  $t=2.7$  ч  
 Fig. 9. Distribution of the vertically averaged modulus of the velocity vector at time  $t=2.7$  h

На пространстве непрерывных функций вычислим норму функции коэффициента вертикальной турбулентности и норму вертикальной компоненты вектора скорости по формулам  $K(t) = \max_{(x,y,z) \in Q} |K(t)|$ ,  $w(t) = \max_{(x,y,z) \in Q} |w(t)|$ .

Графики функций  $w(t)$ ,  $K(t)$  представлены на рис. 10, 11 в разные моменты времени.

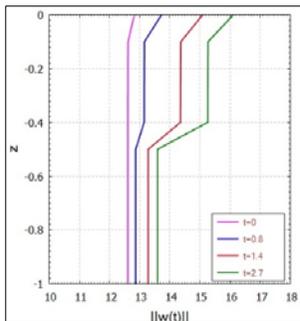


Рис. 10. Графики значений функции  $w(t)$  в моменты времени  $t=0$  ч.,  $0.83$  ч.,  $1.4$  ч.,  $2.7$  ч. от начала расчета

Fig. 10. Graphs of the values of the function  $w(t)$  at the time points  $t=0$  h.,  $0.83$  h.,  $1.4$  h.,  $2.7$  h. from the beginning of the calculation

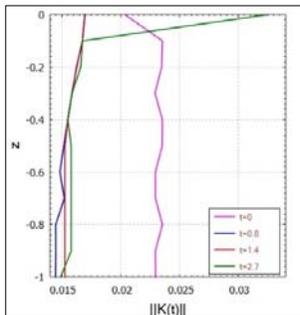


Рис.11. Графики значений функции  $K(t)$  в моменты времени  $t=0$  ч.,  $0.83$  ч.,  $1.4$  ч.,  $2.7$  ч. от начала расчета

Fig. 11. Graphs of the values of the function  $K(t)$  at the time points  $t=0$  h.,  $0.83$  h.,  $1.4$  h.,  $2.7$  h. from the beginning of the calculation

Безразмерная функция свободной поверхности  $\xi(x, y, t)$  в начальный момент времени и через 2.7 часа представлена на рисунках 12,13.

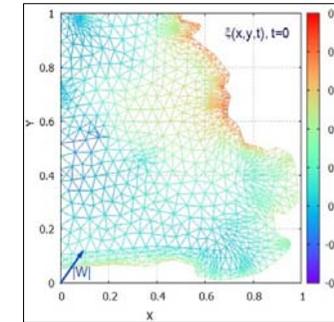


Рис. 12. График значений функции  $\xi(x, y, t)$  в начальный момент времени  
 Fig. 12. Graph of the values of the function  $\xi(x,y,t)$  at the initial moment of time

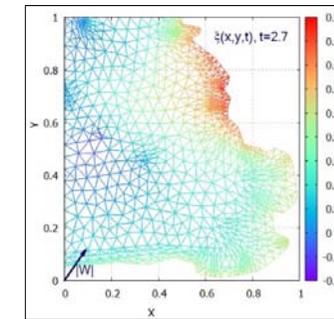


Рис.13. График значений функции  $\xi(x, y, t)$  в момент времени  $t=2.7$  ч. от начала расчета  
 Fig. 13. Graph of the values of the function  $\xi(x,y,t)$  at the time  $t=2.7$  hours from the start of the calculation

## 6. Заключение

В работе представлен результат численного моделирования гидродинамического сценария в акватории залива Петра Великого Японского моря. Основу исследования составляет трехмерная модель осредненных по времени уравнений Навье-Стокса в условиях приближения гидростатики и уравнений диффузии, учитывающих адвективный перенос температуры и соли. Важным фактором негативного влияния воздействия на водную среду при производстве гидростроительных работ является загрязнение водной среды вследствие выхода во взвесь низко дисперсных фракций. В результате происходит замутнение воды и, следовательно, ослабление процессов нормального развития зообентоса.

Численное моделирование развивающихся гидродинамических процессов позволит не только оценить ущерб, нанесенный ихтиофауне в процессе производства работ в морской акватории, но и спрогнозировать оптимальный режим требуемых работ с учетом ветровых погодных условий, сезонных приливов и отливов.

## Список литературы

- [1] Кудрявцева О.В., Ледашева Т.Н., Пинаев В.Е. Методика и практика оценки воздействия на окружающую среду. Проектная документация. Учебное пособие. 2-е издание. М., Экономический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова, 2018 г., 160 стр. / Kudryavtseva O.V., Ledashcheva T.N.,

- Pinaev V.E. Methodology and practice of environmental impact assessment. Project documentation. Tutorial. 2nd edition. M., Faculty of Economics of Moscow State University, 2018, 160 p. (in Russian).
- [2] Водный кодекс Российской Федерации (с изменениями на 1 мая 2022 года). Электронный фонд правовых и нормативно-технических документов / Water Code of the Russian Federation (as amended as of May 1, 2022). Electronic fund of legal and normative-technical documents, URL: <https://docs.cntd.ru/document/901982862> (in Russian).
- [3] Горбачев С.А. Вопросы оценки ущерба водным биоресурсам. Труды Кольского научного центра РАН, вып. 4, 2012 г., стр. 46–62 / Gorbachev S. A. Questions of assessment of water bioresources damage. Transactions of the Kola Science Centre, issue 4, 2012, pp. 46-62 (in Russian).
- [4] Богдановский А.А., Кочергин И. Е. Параметризация характеристик перемешивания для типичных условий северо-восточного шельфа Сахалина. Труды ДВНИГМИ, тематический выпуск «Гидрометеорологические процессы на шельфе: оценка воздействия на окружающую среду», 1998 г., стр. 89-102 / Bogdanovskiy A.A., Kochergin I.E. Parameterization of mixing characteristics for typical conditions of the northeastern Sakhalin shelf. Proceedings of the FERHMI, thematic issue «Hydrometeorological processes on the shelf: environmental impact assessment», 1998, pp. 89-102 (in Russian).
- [5] Котеров В.Н., Юрезанская Ю.С. Моделирование переноса взвешенных веществ на океаническом шельфе. Эффективная гидравлическая крупность полидисперсной взвеси. Журнал вычислительной математики и математической физики, том 49, вып. 7, 2009 г., стр. 1306–1319 / Koterov V.N., Yurezanskaya Yu.S. Simulation of suspended substance dispersion on the ocean shelf: Effective hydraulic coarseness of polydisperse suspension. Computational Mathematics and Mathematical Physics, vol. 49, issue 7, 2009, pp. 1245-1256.
- [6] Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А. Математическое моделирование транспорта насосов в прибрежных водных системах на многопроцессорной вычислительной системе. Вычислительные методы и программирование, том 15, вып. 4, 2014 г., стр. 610–620 / Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Protsenko E.A. Sediment Transport Mathematical Modeling in a Coastal Zone Using Multiprocessor Computing Systems. Numerical Methods and Programming, vol. 15, issue 4, 2014, pp. 610-620 (in Russian).
- [7] Амосова Е.В., Кикелин Д.С. Математическое моделирование распространения зон загрязнения взвесью в морской среде. Подводные исследования и робототехника, вып. 4(38), 2021 г., стр. 72-79 / Amosova E.V., Kikelin D.S. Mathematical modeling of the suspended pollution zones spread in the marine environment. Underwater Investigations and Robotics, issue 4(38), 2021, pp. 72-79 (in Russian).
- [8] Наумов В.А. Математическое моделирование распространения взвешенных примесей от точечного источника и их осаждения в водостоке. Известия КГТУ, вып. 44, 2017 г., стр. 46–58 / Naumov V.A. Mathematical modeling of distribution of suspended impurities from a point source and its deposition in the watercourse. KSTU News, issue 44, 2017, pp. 46-58 (in Russian).
- [9] Pinho J. L.S., Antunes do Carmo J.S., Vieira J.M.P. Mathematical modelling of oil spills in the Atlantic Iberian coastal waters. WIT Transactions on Ecology and the Environment, vol. 68, 2004. pp.337-347.
- [10] Li D., Tang X. et al. Mathematical Modeling of Marine Oil Spills in the Luanjiakou District, near the Port of Yantai. Discrete Dynamics in Nature and Society, 2018, article ID 2736102, 22 p.
- [11] Бухтеев В.Г., Доронин М.М. и др. Динамика океана. Л., Гидрометеоиздат, 1980 г., 303 стр. / Bukhteev V.G., Doronin M.M. et al. Dynamics of the ocean. L., Gidrometeoizdat, 1980, 303 p. (in Russian).

## Информация об авторах / Information about authors

Елена Владимировна АМОСОВА – кандидат физико-математических наук, профессор департамента математического и компьютерного моделирования ИМКТ ДВФУ, научный сотрудник ИПМ ДВО РАН. Сфера научных интересов: дифференциальные уравнения, механика жидкости и газа, вычислительная гидродинамика.

Elena Vladimirovna AMOSOVA – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Mathematical and Computer Modeling of the IMCT FEFU, Researcher, IPM FEB RAS. Research interests: differential equations, fluid and gas mechanics, computational fluid dynamics.

Кирилл Сергеевич КУЗНЕЦОВ – ассистент департамента математического и компьютерного моделирования ИМКТ ДВФУ, аспирант второго года обучения департамента

математического и компьютерного моделирования ИМКТ ДВФУ, лаборант-исследователь ИПМ ДВО РАН. Его научные интересы включают машинное обучение, численные методы, искусственный интеллект.

Kirill Sergeevich KUZNETSOV Assistant of the Department of Mathematical and Computer Modeling, FEFU IMCT, second year postgraduate student of the Department of Mathematical and Computer Modeling, FEFU IMCT, laboratory researcher at IPM FEB RAS. His research interests include machine learning, numerical methods, artificial intelligence.

Виталий Сергеевич ЛЕМЕШЕВ является аспирантом первого года обучения отделения машиностроения, морской техники и транспорта инженерного департамента ПИ ДВФУ. Научные интересы включают численные методы, механика.

Vitaly Sergeevich LEMESHEV is a first-year postgraduate student of the Department of Mechanical Engineering, Marine Engineering and Transport of the Engineering Department of the PI FEFU. Scientific interests include numerical methods, mechanics.