

DOI: 10.15514/ISPRAS-2022-34(5)-17



## О решении одной задачи мелкой воды методом центральных разностей и коррекцией FCT

И.И. Потапов, ORCID: 0000-0002-3323-2727 &lt;potapov2i@gmail.com&gt;

П.С. Тимош, ORCID: 0000-0002-3132-2227 &lt;pavel.timosh@yandex.ru&gt;

Вычислительный центр ДВО РАН (ХФИЦ ДВО РАН),  
680000, Россия, г. Хабаровск, ул. Ким Ю Чена, д. 65

**Аннотация.** В работе предложен алгоритм решения задачи мелкой воды, реализованный на основе центрально-разностной по пространству и явной одношаговой по времени схемы, устойчивость которой достигается методом FCT. Показано, что при решении задачи о распаде разрыва цилиндрического столба жидкости в мелком бассейне, предложенный метод является устойчивым, сравним по точности с методом Мак–Кормака превосходя его по производительности.

**Ключевые слова:** мелкая вода; центрально–разностная схема; FCT; распад разрыва

**Для цитирования:** Потапов И.И., Тимош П.С. О решении одной задачи мелкой воды методом центральных разностей и коррекцией FCT. Труды ИСП РАН, том 34, вып. 5, 2022 г., стр. 243-250. DOI: 10.15514/ISPRAS-2022-34(5)-17

### Solving the shallow water problem by central differences and FCT correction

I.I. Potapov, ORCID: 0000-0002-3323-2727 &lt;potapov2i@gmail.com&gt;

P.S. Timosh, ORCID: 0000-0002-3132-2227 &lt;pavel.timosh@yandex.ru&gt;

Computing Center of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences,  
65, Kim Yu Chen st., Khabarovsk, 680000, Russia

**Abstract.** The paper proposes an algorithm based on central differences and FCT correction for solving the shallow water problem. The results of numerical testing were compared with known data. The comparison showed that the proposed algorithm has similar accuracy with other methods. A comparison of the speed of the proposed algorithm and a similar one based on the McCormack method is given. The conclusion is made about the superiority in speed over the McCormack method with the same accuracy.

**Keywords:** shallow water; central difference scheme; FCT; discontinuity decay problem

**For citation:** Potapov I.I., Timosh P.S. Solving the shallow water problem by central differences and FCT correction. Trudy ISP RAN/Proc. ISP RAS, vol. 34, issue 5, 2022. pp. 243-250 (in Russian). DOI: 10.15514/ISPRAS-2022-34(5)-17

### 1. Введение

Ведение хозяйственной деятельности на пойменных территориях часто влияет на гидродинамические характеристики реки. Поэтому верные и точные количественные оценки влияния хозяйственной деятельности в руслах и поймах рек важны для научного обоснования предлагаемых проектных решений. Математическое моделирование гидравлики речных процессов часто происходит в рамках теории мелкой воды. В данной работе используется плановая постановка задачи мелкой воды.

Из-за гиперболических свойств уравнений мелкой воды большой интерес вызывают методы, способные давать монотонное и консервативное решение задачи Римана при распаде гидравлического разрыва. За последние сто лет было предложено множество способов численного решения задачи Римана с порядком точности выше первого. Например, такие как схемы Лакса [1] и Лакса–Вендоффа [2], Мак–Кормака [3], введение искусственной вязкости [4, 5].

В работе Годунова [6] было показано, что невозможно получить линейный метод решения с порядком точности выше первого. Дальнейшие исследования пошли в направлении создания нелинейных методов решения. Были предложены такие методы, как FCT [7, 8], TVD [9, 10]. В данной работе метод, описанный в [11], расширен для решения задачи мелкой воды. Произведено сравнение метода по производительности с другими применяемыми методами.

### 2. Постановка задачи

В области  $\Omega(0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq m)$  с границами  $\Gamma$ , решается задача мелкой воды.

Математическая модель задачи определяется системой дифференциальных уравнений [12]:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = \Lambda, \quad (1)$$

$$Q = \begin{bmatrix} h \\ q_x \\ q_y \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} \frac{q_x^2}{h} + \frac{1}{2}g(h^2 + h\zeta) \\ \frac{q_x q_y}{h} \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} \frac{q_y}{h} \\ \frac{q_x q_y}{h} \\ \frac{q_y^2}{h} + \frac{1}{2}g(h^2 + h\zeta) \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 \\ -\lambda \sqrt{u^2 + v^2} u \\ -\lambda \sqrt{u^2 + v^2} v \end{bmatrix}. \quad (3)$$

где  $Q$  — вектор консервативных переменных,  $F$  и  $G$  — векторы потоков вдоль осей  $x$  и  $y$ ,  $\Lambda$  — вектор гидравлического сопротивления;  $q_x, q_y$  — компоненты вектора расходов воды ( $m^2/c$ ),  $h$  — глубина (м),  $\zeta$  — уровень дна канала (м),  $g$  — ускорение свободного падения ( $m/c^2$ ),  $\lambda$  — коэффициент гидравлического трения;  $u = \frac{q_x}{h}$  и  $v = \frac{q_y}{h}$  ( $m/c$ ).

На границе  $\Gamma$  области  $\Omega$  заданы условия:

$$\frac{\partial h}{\partial x} n_x + \frac{\partial h}{\partial y} n_y = h(x, y, t). \quad (4)$$

$n_x$  и  $n_y$  — компоненты вектора нормали на границе  $\Gamma$ .

В начальный момент времени заданы распределение компонент вектора расхода и глубина:

$$q_x(x, y, 0) = q_{x_0}(x, y), \quad q_y(x, y, 0) = q_{y_0}(x, y), \quad h(x, y, 0) = h_0(x, y), \quad x, y \in \Omega. \quad (5)$$

### 3. Метод решения

Для решения задачи (1)–(5) предлагается использовать явную схему конечных разностей: разность вперед по времени и центральная разность по пространству. Монотонность решения центрально-разностной схемы обеспечивается методом FCT.

При решении задачи (1)–(5) для расчетной области  $\Omega$  вводится дискретный аналог:  $x_i = \Delta x \cdot i, i = \overline{0 \dots L}, y_j = \Delta y \cdot j, j = \overline{0 \dots M}, t_n = \Delta t \cdot n, n = \overline{0 \dots N}$ . Здесь  $\Delta x = \frac{1}{L}, \Delta y = \frac{1}{M}$  — шаги сетки по пространству,  $\Delta t$  — по времени;  $l, m$  — длина и ширина области,  $L, M$  — количество узлов по осям  $x$  и  $y, N$  — количество узлов по времени.

Ниже приведен алгоритм для решения задачи (1) – (5).

**Шаг 1.** Вычисление предварительного решения

$$Q_{i,j}^+ = Q_{i,j}^n - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1,j}^n - F_{i-1,j}^n) - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta y} (G_{i,j+1}^n - G_{i,j-1}^n) + \Delta t \Lambda_{i,j}^n$$

**Шаг 2.** Вычисление диффузионных

$$f_{i,j}^d = v_{i,j} (Q_{i+1,j}^n - Q_{i,j}^n),$$

$$g_{i,j}^d = \mu_{i,j} (Q_{i,j+1}^n - Q_{i,j}^n),$$

и антидиффузионных потоков

$$f_{i,j}^{ad} = \chi_{i,j} (Q_{i+1,j}^+ - Q_{i,j}^+),$$

$$g_{i,j}^{ad} = \kappa_{i,j} (Q_{i,j+1}^+ - Q_{i,j}^+),$$

где

$$v_{i,j} = \eta_0 + \eta_1 \alpha_{i,j}^2, \quad \mu_{i,j} = \eta_0 + \eta_1 \epsilon_{i,j}^2;$$

$$\chi_{i,j} = \eta_0 + \eta_2 \alpha_{i,j}^2, \quad \kappa_{i,j} = \eta_0 + \eta_2 \epsilon_{i,j}^2;$$

$$\eta_0 = \frac{1}{6}, \quad \eta_1 = \frac{1}{3}, \quad \eta_2 = \frac{1}{6};$$

$$\alpha_{i,j} = \frac{u_{i+1,j}^n + u_{i,j}^n}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad \epsilon_{i,j} = \frac{v_{i,j+1}^n + v_{i,j}^n}{2} \frac{\Delta t}{\Delta y}.$$

**Шаг 3.** Диффузия решения

$$Q_{i,j}^* = Q_{i,j}^+ + f_{i,j}^d - f_{i-1,j}^d + g_{i,j}^d - g_{i,j-1}^d.$$

**Шаг 4.** Расчет первых разностей

$$\Delta_x Q_{i,j}^* = Q_{i,j}^* - Q_{i-1,j}^*,$$

$$\Delta_y Q_{i,j}^* = Q_{i,j}^* - Q_{i,j-1}^*.$$

**Шаг 5.** Ограничение антидиффузионных потоков

$$f_j^{cad} = S_{i,j}^f \max\{0, \min[S_{i,j}^f \Delta_x Q_{i-1,j}^*, |f_{i,j}^{ad}|, S_{i,j}^f \Delta_x Q_{i+1,j}^*]\},$$

$$g_j^{cad} = S_{i,j}^g \max\{0, \min[S_{i,j}^g \Delta_y Q_{i,j-1}^*, |g_{i,j}^{ad}|, S_{i,j}^g \Delta_y Q_{i,j+1}^*]\};$$

$$S_{i,j}^f = \text{sign } f_{i,j}^{ad}, \quad S_{i,j}^g = \text{sign } g_{i,j}^{ad}.$$

**Шаг 6.** Антидиффузионная коррекция решения

$$Q_{i,j}^{n+1} = Q_{i,j}^* - (f_{i,j}^{cad} - f_{i-1,j}^{cad} + g_{i,j}^{cad} - g_{i,j-1}^{cad}).$$

Устойчивость решения определяется следующим условием:

$$\Delta t \leq C \frac{\min(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{u_{max}^2 + v_{max}^2 + g^2 h_{max}^2}}$$

Здесь  $C$  – число Куранта.

## 4. Тестирование и результаты

Тестирование предложенного алгоритма выполнено на классических тестовых задачах, приведенных в работах [13] и [16].

### 4.1 Распад разрыва над горизонтальным дном

Первым тестом является решение одномерной задачи о распаде разрыва над ровным дном [13]. Рассматривается плоское одномерное течение жидкости в канале длины  $l = 240$  м с плоским дном  $\zeta = \text{const}$ . В начальный момент в центре области задается разрыв уровня воды, разделяющий два однородных состояния с высотой  $h = h_L$  слева и  $h = h_R$  справа от разрыва;

справа и слева от разрыва жидкость неподвижна:  $u_L = u_R = 0$ ,  $h_L = 10$  м,  $h_R = 1$  м. Параметры сетки:  $l = 240$  м и  $m = 50$  м;  $\Delta x = 0,25$  м и  $\Delta y = 0,25$  м,  $\Delta t = 0,001$  с.

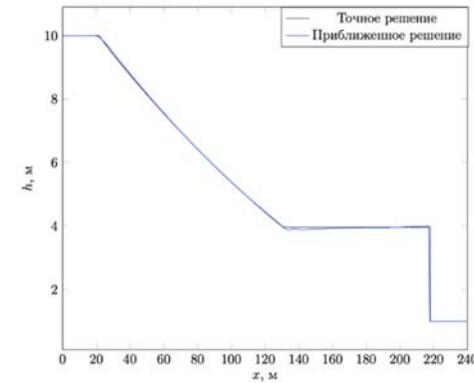


Рис. 1. Уровень глубины в задаче о распаде начального разрыва при  $t = 10$  с.

Fig. 1. Depth level in the initial discontinuity decay problem at  $t = 10$  s

Результаты в виде графика глубины приведены для момента времени  $t = 10$  с на рис. 1.

### 4.2 Задача о распаде цилиндрического разрыва

Второй тест выполнен на задаче об изменении уровня свободной поверхности при разрушении цилиндрического столба несжимаемой невязкой жидкости в мелком бассейне [13–15]. На рис. 2 представлена расчетная область  $\Omega$ .

На границе  $\Gamma$  области  $\Omega$  заданы условия свободного протекания:

$$\frac{\partial h}{\partial x} n_x + \frac{\partial h}{\partial y} n_y = 0.$$

В начальный момент времени заданы распределение компонент вектора расхода и глубина:

$$q_x(x, y, 0) = 0, \quad q_y(x, y, 0) = 0, \quad h(x, y, 0) = \begin{cases} h_c, & \text{при } x^2 + y^2 \leq r^2 \\ h_0, & \text{при } x^2 + y^2 > r^2, \quad x, y \in \Omega. \end{cases}$$

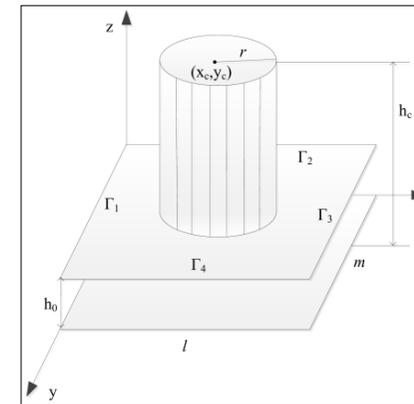


Рис. 2. Схема расчетной области задачи о распаде цилиндрического разрыва.

Fig. 2. Scheme of the computational domain of the cylindrical discontinuity decay problem

Тестирование проведено при следующих параметрах:  $l = 50$  м и  $m = 50$  м;  $\Delta x = 0,25$  м и  $\Delta y = 0,25$  м,  $\Delta t = 0,001$  с;  $r = 10$  м — радиус цилиндрического столба жидкости с

центром в точке  $(x_c, y_c)$ ;  $h_c = 2$  м — глубина в начальный момент времени в пределах столба, и  $h_0 = 0,5$  м — глубина для остальной части области.

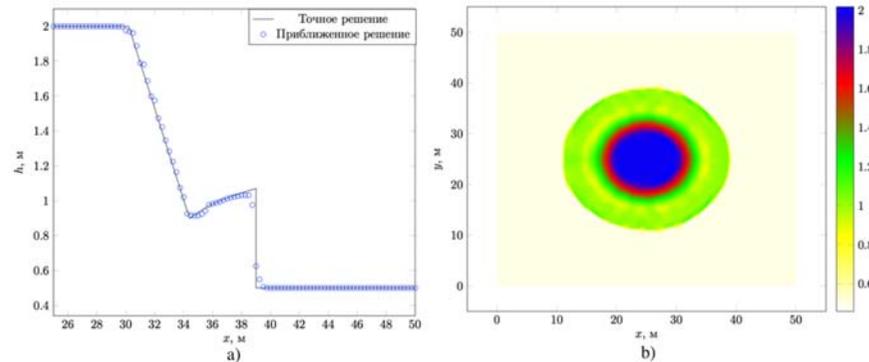


Рис. 3. Тест задачи о распаде цилиндрического разрыва при  $t = 1$  с.  
Fig. 3. Test of cylindrical discontinuity decay problem at  $t = 1$  s.

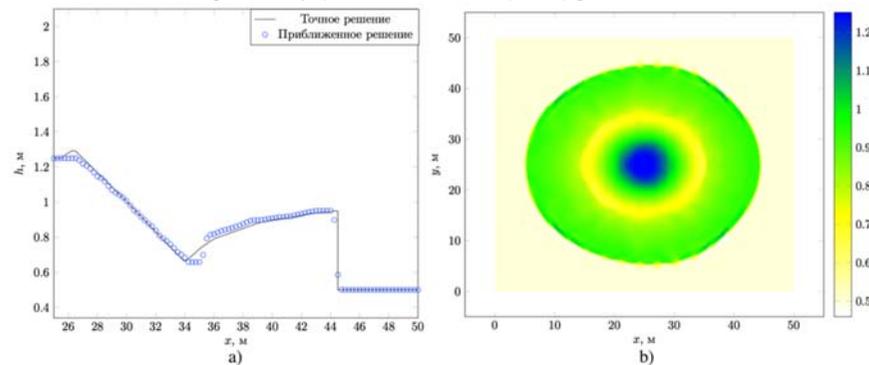


Рис. 4. Тест задачи о распаде цилиндрического разрыва при  $t = 2,5$  с.  
Fig. 4. Test of cylindrical discontinuity decay problem at  $t = 2,5$  s.

Результатами расчетов являются значения функции  $h$ . На рис. 3 приведены результаты для 1 с: график профиля функции  $h$  от центра до края области (3а) и проекция распределения глубины на плоскость  $Oxy$  (3б). Результаты расчетов показывают, что алгоритм плохо улавливает перепады при выбранных шагах по пространству. Это особенно заметно на графике профиля глубины для 2,5 с (рис. 4), что можно связать с особенностями метода антидиффузионной коррекции потока.

Проекция глубины демонстрирует равномерное, симметричное распространение волны по всем направлениям. Полученные результаты подтверждают применимость алгоритма к решению задачи мелкой воды в областях, содержащих распад разрыва.

#### 4.3 Течения с бугром на дне

В данном тесте выбраны следующие параметры:  $l = 25$  м и  $m = 15$  м;  $\Delta x = 0,25$  м и  $\Delta y = 0,25$  м,  $\Delta t = 0,001$  с. Рельеф дна задан по формуле, приведенной в [13]:

$$\zeta(x) = \begin{cases} 0,2 - 0,05(x - 10)^2, & l/3 < x < l/2; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Начальные условия:  $u = 0$ ,  $\zeta + h = 2$  м. При  $x = 0$  расход равен  $q_x = 4,42$  м<sup>2</sup>/с, а при  $x = 25$  м глубина  $h = 2$  м.

Точное решение  $h = h(x)$  можно найти с помощью соотношения [13]:

$$h^3 + \left( \zeta - \frac{q_{in}^2}{2gh_{out}^2} - h_{out} \right) h^2 + \frac{q_{in}^2}{2g} = 0.$$

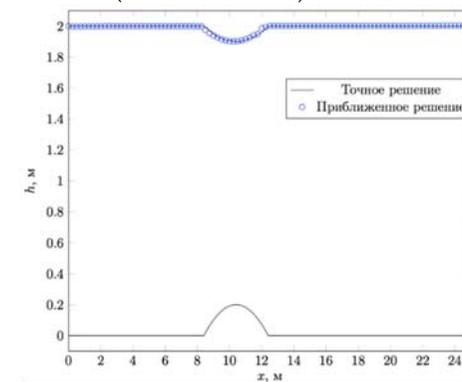


Рис. 5. Уровень глубины в задаче о течении с бугром на дне (докритический режим) при  $t = 10$  с.  
Fig. 5. Depth level in the problem of a flow with a hillock at the bottom (subcritical regime) at  $t = 10$  s.

Результаты приведены для момента времени  $t = 10$  с на рис. 5. При времени равном 10 секундам течение является установившимся. При этом рассчитанные значения совпадают с точным решением.

#### 5. Заключение

В работе предложен метод решения плановой задачи мелкой воды. Метод реализован на основе центрально-разностной по пространству и явной одношаговой по времени схемы, устойчивость которой достигается использованием метода антидиффузионной коррекции потоков FCT.

Работа метода продемонстрирована на примере решения классических тестовых задач, приведенных в работах [13] и [16]. Результаты моделирования сравнивались с известными данными [13-16]. Сравнение показало, что предложенный метод имеет сравнимую точность решения.

Приведенный алгоритм был реализован на языке C# и платформе .Net 6. Для сравнения скорости вычислений также был реализован метод Мак-Кормака с использованием FCT. Измерения показали, что скорость вычислений предложенного алгоритма на 40 процентов выше.

#### Список литературы / References

- [1] Lax P.D. Weak Solutions of Nonlinear Hyperbolic Equations and their Numerical Computation. Communications on Pure and Applied Mathematics, vol. 7, 1954, pp. 159-193.
- [2] Lax P.D., Wendroff B. Systems of Conservation Laws. Communications on Pure and Applied Mathematics, vol. 13, 1960, pp. 217-237.
- [3] MacCormack R.W. The Effect of Viscosity in Hypervelocity Impact Cratering. AIAA Paper 69-354, 1969.
- [4] Von Neumann J., Richtmyer R.D. A Method for the Numerical Calculation of Hydrodynamic Shocks. Journal of Applied Physics, vol. 21, issue 3, 1950, pp. 232-237.
- [5] Lapidus A. A Detached Shock Calculation by Second-Order Finite Differences. Journal of Computational Physics, vol. 2, issue 2, 1967, pp. 154-177.

- [6] Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики. Математический сборник. Новая серия, том 47(89), вып. 3, 1959 г., стр. 271-306 / Godunov S.K. Difference method for the numerical computation of discontinuous solutions of fluid dynamics equations. *Matematicheskii Sbornik. Novaya Seriya*, vol. 47(89), issue 3, 1959, pp. 271-306 (in Russian).
- [7] Boris J.P., Book D.L. Flux-Corrected Transport. I. SHASTA, A Fluid Transport Algorithm that Works, *J. Comp. Physics*, 11, p. 38, 1973.
- [8] Zalesak S.T. Fully multidimensional flux-corrected transport algorithms for fluids. *Journal of Computational Physics*, vol. 31, issue 3, 1979, pp. 335-362.
- [9] Harten A. High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws. *Journal of Computational Physics*, vol. 49, issue 3, 1983, pp. 357-393.
- [10] Chakravarthy R., Osher S. A New Class of High Resolution TVD Schemes for Hyperbolic Conservation Laws. AIAA Paper 85-0363, 1985.
- [11] Потапов И.И., Тимош П.С. Об использовании Центрально-разностной схемы для решения задачи газовой динамики. *Информатика и системы управления*, вып. 2(68), 2021 г., стр. 17–22 / Potapov I.I., Timosh P.S. On the use of the central difference scheme for solving the problem of gas dynamics. *Information Science and Control Systems*, issue 2(68), 2021, pp. 17-22 (in Russian).
- [12] Картвелишвили Н.А. Неустойчивые открытые потоки. Л., Гидрометеониздат, 1968 г., 125 стр. / Kartvelishvili N.A. Unsettled open streams. L., Gidrometeoizdat, 1968, 125 p. (in Russian).
- [13] Беликов В.В., Алексюк А.И. Модели мелкой воды в задачах речной гидродинамики. М., РАН, 2020 г., 346 стр. / [1]. Belikov V.V., Aleksyuk A.I. Shallow water models in problems of river hydrodynamics. М., RAS, 2020, 346 p. (in Russian).
- [14] Amiri S.M., Talebbeydokhti N., Baghlani A. A two-dimensional well-balanced numerical model for shallow water equations. *Scientia Iranica*, vol. 20, issue 1, 2013, pp. 97–107.
- [15] Canestrelli A., Dumbser M. et al. Well-balanced high-order centered schemes on unstructured meshes for shallow water equations with fixed and mobile bed. *Advances in Water Resources*, vol. 33, issue 3, 2010, pp. 291-303.
- [16] Булатов О.В., Елизарова Т.Г. Регуляризованные уравнения мелкой воды и эффективный метод численного моделирования течений в неглубоких водоемах. *Журнал вычислительной математики и математической физики*, том 51, вып. 1, 2011 г., pp. 170–184 / Bulatov O.V., Elizarova T.G. Regularized shallow water equations and an efficient method for numerical simulation of shallow water flows. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, vol. 51, issue1, 2011, pp. 160–173.

### Информация об авторах / Information about authors

Игорь Иванович ПОТАПОВ – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией вычислительной механики. Сфера научных интересов: метод конечных элементов, метод контрольных объемов, метод частиц, решение систем алгебраических уравнений; механика сыпучих сред, механика гетерогенных сред, механика русловых процессов.

Igor Ivanovich POTAPOV – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department of Computational mechanics. Research interests: finite element method, control volume method, particle method, solution of systems of algebraic equations; mechanics of granular media, mechanics of heterogeneous media, mechanics of channel processes.

Павел Сергеевич ТИМОШ — младший научный сотрудник, аспирант. Научные интересы: численные методы, механика русловых процессов.

Pavel Sergeevich TIMOSH is a research assistant. Research interests is numerical methods, mechanics of channel processes.