DOI: 10.15514/ISPRAS-2023-35(4)-12

Символьное вычисление условия резонанса произвольного порядка в системе Гамильтона

[1,2] *Батхин А.Б.,* ORCID:0000-0001-8871-4697<*batkhin@gmail.com*>
[3] Хайдаров З. Х., ORCID: 0000-0002-2580-4887 <*zafarxx@gmail.com*>
[1] *Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН,*
125047, Россия, г. Москва, Миусскаяпл.,д.4
[2] *Московский физико-технический институт*
141701, Россия, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9
[3] *Самаркандский государственный университет им. Ш. Рашидова,*
Узбекистан, г. Самарканд, Университетский бул., д.15

Abstract. Исследование формальной устойчивости положений равновесия многопараметрической системы Гамильтона в случае общего положения традиционно проводится с использованием её нормальной формы при условии отсутствия резонансов небольших порядков. В работе предлагается способ символьного вычисления условия существования резонанса произвольного порядка для системы с тремя степенями свободы. Показано, что это условие для каждого резонансного вектора может быть представлено в виде рациональной алгебраической кривой. Методами компьютерной алгебры получена рациональная параметризация этой кривой для случая общего резонанса. Рассмотрен модельный пример некоторой двупараметрической системы маятникового типа.

Keywords: символьное вычисление, условие резонанса, система Гамильтона.

For citation: Батхин А. Б., Хайдаров З. Х. Символьное вычисление условия резонанса произвольного порядка в системе Гамильтона. Труды ИСП РАН, 2023, том 35 вып. 4, с. 197– 218. 10.15514/ISPRAS-2023-35(4)-12.

Благодарности: Авторы выражают благодарность профессору А.Д. Брюно за указанные замечания и полезное обсуждение работы.

Symbolic Computation of an Arbitrary-Order Resonance Condition in a Hamiltonian System

[1,2] *A.B. Batkhin,* ORCID: 0000-0001-8871-4697 <*batkhin@gmail.com*>
[3] *Z.Kh. Khaydarov,* ORCID: 0000-0002-2580-4887 <*zafarxx@gmail.com* >
[1] *Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences,*
4, Miusskaya pl., Moscow, Russia, 125047
[2] *Moscow Institute of Physics and Technology,*
9, Institutskii per., Dolgoprudnyi, Moscow oblast, Russia, 141701
[3] *Sharof Rashidov Samarkand State University,*
15, Universitetskii bul'v., Samarkand, Uzbekistan, 140104

Abstract. The study of formal stability of equilibrium positions of a multiparametric Hamiltonian system in a generic case is traditionally carried out using its normal form under the condition of the absence of resonances of small orders. In this paper we propose a method of symbolic computation of the condition of existence of a resonance of arbitrary order for a system with three degrees of freedom. It is shown that this condition for each resonant vector can be represented as a rational algebraic curve. By methods of computer algebra the rational parametrization of this curve for the case of an arbitrary resonance is obtained. A model example of some two-parameter system of pendulum type is considered.

Keywords: Hamiltonian system, equilibrium state, normal form, formal stability, resonance condition, elimination ideal.

For citation: Batkhin A.B., Khaydarov Z.Kh. Symbolic Computation of an Arbitrary-Order Resonance Condition in a Hamiltonian System. Trudy ISP RAN/Proc. ISP RAS, vol. 35, issue 4, 2023. pp. 197-218. DOI: 10.15514/ISPRAS-2023-35(4)-12.

Acknowledgements. Authors express their gratitude to Professor A.D. Bruno for comments and useful discussions.

1. Введение

Для многих механических систем наличие резонанса между собственными частотами приводит к появлению сложной динамики, когда энергия колебаний «перекачивается» между теми степенями свободы, чьи соответствующие частоты находятся в резонансе. Однако, наличие нетривиальных решений резонансного уравнения позволяет получить дополнительные формальные первые интегралы и, как следствие, позволяет провести анализ устойчивости положения равновесия или асимптотически проинтегрировать систему уравнений движения, приведённую к нормальной форме. Кроме того, для многопараметрических систем, в которых отсутствуют сильные резонансы (см. определение 3), позволяет при определённых условиях находить в пространстве параметров области формальной устойчивости (устойчивость по Мозеру [1]).

Формальная устойчивость по Мозеру слабее, чем классическая устойчивость по Ляпунову, но гарантирует скорость разбегания траекторий медленнее, чем любая степенная функция с произвольным положительным показателем. С практической точки зрения формальная устойчивость вполне достаточна для большинства технических механических систем.

Существует два типа задач об устойчивости многопараметрических систем.

- Для определённых значений вектора параметров P выяснить устойчивость положения равновесия (ПР) (*частная задача*).

  Найти в пространстве параметров Π все значения P, для которых ПР $z = 0$ системы устойчиво, т.е. вычислить так называемое множество устойчивости Σ системы (*общая* *задача*).

В статье рассматривается схема решения общей задачи.

Цель работы состоит в описании схемы исследования формальной устойчивости ПР системы Гамильтона с тремя степенями свободы, а также в получении явного представления условий существования резонансов кратности 1 в терминах коэффициентов характеристического многочлена линейной части гамильтоновой системы.

Предварительные результаты работы были опубликованы в препринте авторов [2]. В данной статье авторы предлагают усовершенствованный способ получения полиномиальной параметризации резонансного многообразия, соответствующего трёхчастотному резонансу общего вида. Этот способ может быть обобщён на системы с большим числом степеней свободы.

Структура работы следующая: в разделах 2 и 3 напоминаются результаты о множестве устойчивости линейной системы Гамильтона и гамильтоновой нормальной форме соответственно; в разделе 4 рассматривается общая схема исследования формальной устойчивости положения равновесия системы Гамильтона и формулируется постановка задачи; в разделе 5 доказывается основной результат в виде теоремы 4 и описывается способ символьного вычисления полиномиального представления резонансного многообразия, соответствующего трёхчастотному резонансу общего вида, в явной и неявной формах. Наконец, в разделе 6 приведён пример вычисления всех многообразий, соответствующих сильным резонансам, для двупараметрической системы маятникового типа с тремя степенями свободы.

Обозначения

- Полужирные символы типа $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ обозначают столбцы-векторы в n-мерных вещественных $\mathbb{R}^n$ или комплексных $\mathbb{C}^n$ пространствах.
- Полужирные символы типа $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ обозначают векторы в n-мерной целочисленной решётке $\mathbb{Z}^n$.
- $|\mathbf{p}| = \sum_{j=1}^{n} |p_j|$ обозначает норму вектора.
- Для $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$ и $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)^\top$ обозначим через $\mathbf{x}^\mathbf{p} \equiv \prod\limits_{j=1}^{n} x_j^{p_j}$ моном и через $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \equiv \sum\limits_{j=1}^{n} p_j x_j$ скалярное произведение пары векторов.

2. Множество устойчивости линейной гамильтоновой системы

Рассмотрим автономную гамильтонову систему с аналитической функцией $H(\mathbf{z}; \mathbf{P})$, ПР которой совпадает с началом координат. Тогда гамильтониан $H(\mathbf{z}; \mathbf{P})$ раскладывается в сходящийся ряд однородных полиномов $H_k(\mathbf{z}; \mathbf{P})$ степени k от своих фазовых переменных $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$

$$H(\mathbf{z}; \mathbf{P}) = \sum_{k=2}^{\infty} H_k(\mathbf{z}; \mathbf{P}), \tag{2.1}$$

где $\mathbf{P}$ — вектор параметров.

В случае общего положения ряд (2.1) начинается с квадратичного гамильтониана $H_2(\mathbf{z}; \mathbf{P})$, определяющего локальную динамику вблизи ПР. Поведение фазового потока в первом приближении описывается линейной гамильтоновой системой

$$\dot{\mathbf{z}} = B(\mathbf{P})\mathbf{z}, \quad B(\mathbf{P}) = \frac{1}{2} J \frac{\partial^2 H_2(\mathbf{z}; \mathbf{P})}{\partial \mathbf{z}^2}. \tag{2.2}$$

Напомним здесь основные свойства линейной гамильтоновой системы.

1. Если λ_j есть собственное число матрицы B, то $-\lambda_j$ также является её СЧ [3]. Все СЧ λ_j, $j = 1, \ldots, 2n$, матрицы B могут быть упорядочены таким образом, что $\lambda_{j+n} = -\lambda_j$, $j = 1, \ldots, n$. Обозначим через вектор $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ множество *базисных собственных значений*.
2. Характеристический многочлен $\check{f}(\lambda)$ матрицы B содержит только чётные степени λ, поэтому он является многочленом от $\mu = \lambda^2$. Такой многочлен назван в [4] *полухарактеристическим*
$$f(\mu) = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}(\mathbf{P})\mu^k, \quad a_0 \equiv 1. \tag{2.3}$$
3. Если $\operatorname{Re}\lambda_j \neq 0$ для некоторого j, то ПР неустойчиво.
4. Если все $\operatorname{Re}\lambda_j = 0$, то поведение фазового потока в его окрестности может быть получено только при учёте нелинейных членов.

Определение 1. *Множество устойчивости* Σ линейной системы (2.2) — это множество всех значений параметров $\mathbf{P} \in \Pi$, для которых ПР $\mathbf{z} = 0$ системы (2.2) устойчиво по Ляпунову.

В терминах корней многочлена (2.3) условие устойчивости ПР даётся следующей теоремой.

Теорема 1 ([4]). *Положение равновесия* $\mathbf{z} = 0$ *линейной гамильтоновой системы* (2.2) *устойчиво по Ляпунову тогда и только тогда, когда*

1. *все корни* μ_k *полухарактеристического многочлена* (2.3) *вещественны и неположительны;*
2. *все элементарные делители матрицы* B *просты.*

Невыполнение условия 1 приводит к экспоненциальному разбеганию решений, которое не перекрывается нелинейными добавками, привносящими только степенной эффект в поведение решений. Невыполнение условия 2 приводит к степенной неустойчивости, которая может быть перекрыта нелинейными добавками.

Условие вещественности и неположительности корней многочлена $f(\mu)$ определяется следующей теоремой.

Теорема 2. *Для того чтобы все корни многочлена* $f(\mu)$ *степени* n *были вещественны и неположительны, необходимо и достаточно выполнение условий* $a_j(\mathbf{P}) \geqslant 0$, $j = 1, \ldots, n$, $D^{(k)}(f) \geqslant 0$, $k = 0, \ldots, n-2$, *где* $D^{(k)}(f)$ *—* k*-й субдискриминант многочлена* $f(\mu)$ *[5, 6].*

В гамильтоновом случае согласно п. 4 полный анализ устойчивости возможен только с учётом нелинейных членов. Такое исследование следует выполнять приведя исходный гамильтониан (2.1) к наиболее простому виду, называемому нормальной формой (НФ).

3. Нормальная форма системы Гамильтона

В дальнейшем считаем, что выполнено условие 1 устойчивости теоремы 1. Если не выполнено условие 2 теоремы 1, то устойчивость определяется по НФ общими методами.

Согласно теореме 12 в [7] существует каноническое формальное преобразование в виде степенного ряда, которое приводит исходную систему Гамильтона к её *нормальной форме*

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{v}}, \quad \dot{\mathbf{v}} = -\frac{\partial h}{\partial \mathbf{u}},$$

задаваемой нормализованным гамильтонианом $h(\mathbf{u},\mathbf{v})$

$$h(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j \lambda_j u_j v_j + \sum h_{\mathbf{pq}} \mathbf{u}^{\mathbf{p}} \mathbf{v}^{\mathbf{q}},\ \sigma_j = \pm 1, \tag{3.1}$$

который содержит только резонансные члены $h_{\mathbf{pq}}\mathbf{u}^{\mathbf{p}}\mathbf{v}^{\mathbf{q}}$, удовлетворяющие условию

$$\langle \mathbf{p}-\mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda} \rangle = 0. \tag{3.2}$$

Здесь $0 \leqslant \mathbf{p},\mathbf{q} \in \mathbb{Z}^n$, $|\mathbf{p}|+|\mathbf{q}| \geqslant 2$ и $h_{\mathbf{pq}}$ — постоянные коэффициенты.
Резонансное уравнение (3.2) имеет два вида решений, которым соответствуют два вида резонансных членов в НФ (3.1):

1. *вековые члены* вида $h_{\mathbf{pp}}\mathbf{u}^{\mathbf{p}}\mathbf{v}^{\mathbf{p}}$, которые всегда присутствуют в гамильтоновой нормальной форме из-за особой структуры матрицы B линейной части системы (2.2); вековые члены являются мономами только чётных степеней от фазовых переменных и входят в соответствующие однородные формы;
2. *строго резонансные члены*, которые соответствуют нетривиальным целочисленным решениям уравнения

$$\langle \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda} \rangle = 0. \tag{3.3}$$

Сама процедура нормализации обычно выполняется в комплексных переменных. Для перехода к комплексным переменным используется линейное преобразование $\Phi : (\mathbf{x},\mathbf{y}) \to \left(\boldsymbol{\zeta}, \bar{\boldsymbol{\zeta}}\right)$, которое преобразует исходный гамильтониан к виду

$$h\left(\boldsymbol{\zeta}, \bar{\boldsymbol{\zeta}}\right) = \sum h_{\mathbf{pq}} \boldsymbol{\zeta}^{\mathbf{p}} \bar{\boldsymbol{\zeta}}^{\mathbf{q}}, \tag{3.4}$$

где $\mathbf{p},\mathbf{q} \in \mathbb{Z}^n$ и $|\mathbf{p}|+|\mathbf{q}| \geqslant 2$. Значение $|\mathbf{p}|+|\mathbf{q}|$ называется *порядком* соответствующего члена разложения.

Определение 2. Функция Гамильтона $h\left(\boldsymbol{\zeta}, \bar{\boldsymbol{\zeta}}\right)$ называется *комплексной нормальной формой* вещественной системы Гамильтона для случая полупростых СЧ, если

1. Его квадратичная часть $h_{\mathbf{2}}$ имеет вид

$$h_{\mathbf{2}} = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j \lambda_j \zeta_j \bar{\zeta}_j,\ \sigma_j = \pm 1;$$

2. Разложение (3.4) содержит только члены $h_{\mathbf{pq}}\boldsymbol{\zeta}^{\mathbf{p}}\bar{\boldsymbol{\zeta}}^{\mathbf{q}}$, которые удовлетворяют резонансному уравнению (3.2). Константы σ_j являются инвариантами НФ.

Дальнейшие результаты связаны с существованием резонансов в системе Гамильтона, поэтому напомним их определение.

Определение 3 ([8, Гл.I, § 3])**.** *Кратность резонанса* $\mathfrak{k}$ — это число линейно независимых решений $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^n$ резонансного уравнения $\langle \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda} \rangle = 0$. *Порядок резонанса* равен $\mathfrak{q} = \min|\mathbf{p}|$ по $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^n$, $\mathbf{p} \neq 0, \langle \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda} \rangle = 0$. Если решение резонансного уравнения содержит только два собственных значения, то такой резонанс называется *двухчастотным резонансом*, если более двух — то *многочастотным резонансом*. Резонансы порядков 2, 3 и 4 назовём *сильными*, больших порядков — *слабыми* резонансами.

Пусть $\mathcal{L}$ подпространство, образованное всеми решениями уравнения (3.3). Тогда согласно [8, Гл.I, § 3] величина

$$\langle \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\omega} \rangle = \mathrm{const}, \quad \boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \ldots, \rho_n), \quad \rho_j = \zeta_j \bar{\zeta}_j, \tag{3.5}$$

есть первый интеграл для любого вектора $\boldsymbol{\omega}$ из ортогонального дополнения $\mathcal{L}^\perp$ к подпространству $\mathcal{L}$.

Рассмотрим каким образом наличие резонансов и их кратность влияет на количество первых интегралов системы Гамильтона в НФ.

1. Пусть уравнение (3.3) не имеет нетривиальных решений. Тогда кратность резонанса $\mathfrak{k} = 0$ и имеется n независимых первых интегралов (3.5) НФ. Это есть НФ Биркгофа [9]

   $$h\left(\boldsymbol{\zeta}, \bar{\boldsymbol{\zeta}}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} h_{2k}\left(\boldsymbol{\zeta}, \bar{\boldsymbol{\zeta}}\right),$$

   состоящая из однородных форм чётных степеней $2k$, зависящих только от переменных вида $\zeta_j \bar{\zeta}_j$, $j = 1, \ldots, n$, при этом каждая из величин $\zeta_j \bar{\zeta}_j$ является формальным первым интегралом. В переменных действие-угол $(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\rho})$ НФ Биркгофа может быть записана в виде

   $$h(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k(\boldsymbol{\rho}).$$

   Поскольку все ρ_j независимы, то в этом случае НФ интегрируема.
2. Пусть резонанс имеет кратность $\mathfrak{k} = 1$. Это всегда выполнено, если резонанс двухчастотный. Для многочастотных резонансов кратность 1 означает, что для любого меньшего набора частот резонансное уравнение имеет только тривиальное решение. Резонанс кратности 1 обеспечивает наличие $n-1$ независимых первых интегралов (3.5), которые вместе с интегралом $h = \mathrm{const}$ дают интегрируемость НФ.
3. Если система имеет две степени свободы, то её НФ всегда интегрируема, поскольку при отсутствии резонансов имеет место НФ Биркгофа п. 1, а при его наличии этот резонанс всегда двухчастотный, т. е. обеспечивает наличие ещё одного независимого интеграла (3.3).
4. Для системы с тремя степенями свободы согласно теореме 3.1 в [8, Гл.I, § 3] достаточное для интегрируемости нормализованной системы Гамильтона число первых интегралов вида (3.3) обеспечивает либо двухчастотный резонанс, либо трёхчастотный резонанс кратности 1.

Ниже потребуется условие, с помощью которого последующие результаты проще формулируются.

Условие A_k^n[10]
Будем говорить, что для нормализованной системы Гамильтона выполняется условие A_k^n*, если резонансное уравнение* (3.3) *не имеет целочисленных решений* $\mathbf{p}$ *с* $|\mathbf{p}| \leqslant k$.

4. Схема исследования формальной устойчивости

Определение 4. ПР $\mathbf{z} = 0$ системы с функцией Гамильтона $H(\mathbf{z})$ *формально устойчиво*, если существует возможно расходящийся степенной ряд $G(\mathbf{z})$, который является формальным положительно определенным первым интегралом $\{G, H\} = 0$.

В [10] было дано схематическое описание метода изучения формальной устойчивости ПР. Этот метод основан на следующих ключевых результатах:

- вычисляется НФ системы Гамильтона в окрестности ПР;
- применяется теорема Брюно [11] о формальной устойчивости;
- используются q-аналоги объектов классической теории исключений.

Пусть имеет место условие A_4^n, т. е. $\langle \mathbf{L}, \boldsymbol{\lambda} \rangle \neq 0$ для $\mathbf{L} \in \mathbb{Z}^n$, $0 < |\mathbf{L}| \leqslant 4$, тогда существует аналитическое каноническое преобразование $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \to (\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi})$ такое, что новый гамильтониан g имеет вид

$$g(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi}) = g_1(\boldsymbol{\rho}) + g_2(\boldsymbol{\rho}) + r(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi}),$$

где $g_1(\boldsymbol{\rho}) = \langle \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\rho} \rangle$, $g_2(\boldsymbol{\rho}) = \langle C\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho} \rangle$, $C = [c_{ij}]_{i,j=1}^n$, и $r(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi})$ является сходящимся степенным рядом переменных $(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi})$ степени три или выше в $\boldsymbol{\rho}$.

При отсутствии сильных резонансов условие формальной устойчивости гамильтоновой системы в окрестности ПР определяется следующей теоремой.

Теорема 3 (Брюно [11])**.** *Если условие A_4^n выполнено и для любых ненулевых целых векторов $\mathbf{L}$, которые являются решением уравнения $\langle \mathbf{L}, \boldsymbol{\lambda} \rangle = 0$, квадратичная форма $\langle C\mathbf{L}, \mathbf{L} \rangle \neq 0$ при $\boldsymbol{\lambda} \neq 0$, то ПР $\mathbf{z} = 0$ гамильтоновой системы формально устойчиво.*

Таким образом, для применения теоремы 3 о формальной устойчивости необходимо найти границы областей в пространстве параметров Π, определяемых резонансными многообразиями (см. определение 5 ниже), соответствующие сильным резонансам.

Определение 5. *Резонансным многообразием* $\mathcal{R}_n^{\mathbf{p}}$ в пространстве $\mathbb{K}$ коэффициентов $a_1, \ldots, a_n$ полухарактеристического многочлена $f_n(\mu)$ степени n назовём такое алгебраическое многообразие, на котором вектор базовых собственных значений $\boldsymbol{\lambda}$ соответствующего характеристического многочлена $\check{f}(\lambda)$ является нетривиальным решением резонансного уравнения (3.3) для фиксированного целочисленного вектора $\mathbf{p}$. Аналитическое представление многообразия $\mathcal{R}_n^{\mathbf{p}}$ в неявной или параметрической формах далее обозначим $R_n^{\mathbf{p}}$.

Постановка задачи

Для исследования формальной устойчивости ПР гамильтоновой системы необходимо:

- в пространстве параметров Π найти множество устойчивости Σ линейной системы;
- в ней определить области, в которых квадратичная форма $H_2(\mathbf{z}; \mathbf{P})$ не является знакоопределённой;
- в найденных областях выделить их части S_k, в которых отсутствуют сильные резонансы;
- в каждой из таких частей S_k выполнить процедуру нормализации гамильтониана до четвёртого порядка включительно и применить теорему 3.

Для выполнения последнего пункта достаточно выбрать какую-либо точку в каждой из частей S_k в пространстве параметров и воспользоваться каким-либо алгоритмом нормализации функции Гамильтона. Поскольку в каждой внутренней точке части S_k все собственные числа λ_k, $k = 1, \ldots, n$ простые, то легко применим алгоритм инвариантной нормализации [12].

В данной работе рассматривается описание резонансных многообразий порядков 2, 3 и 4 в пространстве коэффициентов $\mathbb{K}$ полухарактеристического многочлена $f(\mu)$ для системы Гамильтона с тремя степенями свободы.

Задача 1 (Основная задача)**.** Для многопараметрической системы Гамильтона с 3 степенями свободы дать описание областей в пространстве параметров системы, в которых отсутствуют резонансы порядков 2, 3 и 4.

Рассмотрим более подробно, при каких условиях реализуются резонансы указанных выше порядков. Для резонанса

- порядка $\mathfrak{q} = 2$: $p = (1, 1, 0)$ — это случай кратных корней, который описывается дискриминантным множеством $R_3^{(1,1,0)} \equiv D(f) = 0$;
- порядок $\mathfrak{q} = 3$: для двухчастотного случая $p = (2, 1, 0)$, описывается q-дискриминантом $R_3^{(2,1,0)} \equiv D_4(f) = 0$;
- порядок $\mathfrak{q} = 4$: для двухчастотного случая $p = (3, 1, 0)$, описывается q-дискриминантом $R_3^{(3,1,0)} \equiv D_9(f) = 0$;
- в трёхчастотном случае: для порядка 3 описывается условием $R_3^{(1,1,1)} = 0$, а для порядка 4 — условием $R_3^{(2,1,1)} = 0$.

Для решения этой задачи следует получить описание границ областей, свободных от сильных резонансов. Эти границы состоят из участков алгебраических многообразий, на которых резонансное уравнение (3.3) имеет нетривиальное решение.

Основную задачу разобьём на несколько вспомогательных задач.

1. Получить аналитическое представление в пространстве коэффициентов $\mathbb{K} = (a_1, a_2, a_3)$ кубического многочлена резонансных многообразий $\mathcal{R}_3^{\mathbf{p}}$ для всех векторов $\mathbf{p}$ порядков 2, 3 и 4.
2. Выяснить взаимное расположение всех найденных выше резонансных многообразий, т. е. определить, каким образом указанные выше резонансные многообразия касаются или пересекаются в пространстве $\mathbb{K}$.

5. Вычисление условия существования резонансов в системе с тремя степенями свободы

Рассмотрим два способа вычисления условий существования резонансных соотношений для заданного резонансного вектора $\mathbf{p}^*$.

Первый способ позволяет получить неявное представление резонансного многообразия $\mathcal{R}_3^{\mathbf{p}}$ в пространстве коэффициентов $\mathbb{K}$, а уже затем исследовать его структуру.

Второй способ позволяет получить сначала параметрическое представление резонансного многообразия $\mathcal{R}_3^{\mathbf{p}}$, а затем с его помощью вычислить неявное представление, выполнить визуализацию многообразия и исследовать структуру особых точек последнего.

Каждый из этих способов предполагает, что сначала найдено резонансное соотношение между корнями μ_j многочлена $f(\mu)$ для заданного вектора $\mathbf{p}^*$, которое вычисляется следующим образом.

1. Для заданного вектора $\mathbf{p}^* = (r, q, 1)$, где $r, q \in \mathbb{Q}$, $r, q \neq 0$, удовлетворяющего резонансному уравнению $\langle \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda} \rangle = 0$, составляется полиномиальный идеал
$$\mathcal{J} = \left\{ \langle \mathbf{p}^*, \boldsymbol{\lambda} \rangle, \lambda_j^2 - \mu_j, j = 1, \dots, n \right\}$$
2. Вычисляется базис Грёбнера $\mathcal{G}$ этого идеала с исключающим мономиальным порядком переменных $\lambda_j, \mu_j, j = 1, \dots, n$. Первый многочлен $\mathfrak{g}_1$ из $\mathcal{G}$ является квазиоднородным многочленом по переменным $\mu_j, j = 1, \dots, n$. Его нули определяют условие существования резонанса для данного вектора $\mathbf{p}^*$.

Для резонансного вектора $\mathbf{p}^* = (r, q, 1)$ это условие имеет вид квадратичной формы от корней μ_k, $k = 1, 2, 3$:

$$R_3^{(r,q,1)}(\mu_j) \equiv q^4\mu_2^2 - 2q^2r^2\mu_1\mu_2 + r^4\mu_1^2 - 2q^2\mu_2\mu_3 - 2r^2\mu_1\mu_3 + \mu_3^2 = 0 \tag{5.1}$$

Отметим, что все описанные выше вычисления выполнялись с использованием систем компьютерной алгебры (СКА) `Maple`. При этом применялись следующие пакеты и процедуры:

- Для вычисления и исследования идеалов $\mathcal{G}, \mathcal{F}$ использовалась процедура `Basis` построения базисов Грёбнера для различных лексикографических порядков, а также некоторые дополнительные процедуры пакета `Groebner`.
- Для определения рода кривой использовалась команда `genus`, а для нахождения параметризации — `parametrization` из пакета `algcurves`.

Апробация методов была выполнена на модельном примере, описанном в п. 6.

5.1 Первый способ вычисления

Данный способ подробно описан в работах авторов [2, 13] поэтому здесь приведём его лишь краткую схему вычислений.

Для получения соответствующего резонансного условия $\mathcal{R}_3^{\mathbf{p}^*}$ в неявной форме в виде нулей полинома с коэффициентами $a_j, j = 1, \ldots, 3$ полинома $f(\mu)$, строится новый базис Грёбнера $\mathcal{F}$ идеала, который содержит полученное условие (5.1) для μ_j и множество элементарных симметрических многочленов, связывающих коэффициенты a_j многочлена $f(\mu)$ и его корни μ_k:

$$\begin{aligned} &\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + a_1 = 0, \\ &\mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_2\mu_3 - a_2 = 0, \\ &\mu_1\mu_2\mu_3 + a_3 = 0. \end{aligned} \tag{5.2}$$

При вычислении базиса $\mathcal{F}$ указывается следующий порядок исключения переменных: в начале μ_j, а затем $a_j, j = 1, \ldots, n$. Таким же образом, нули первого полинома $\mathfrak{f}_1$ вычисленного базиса $\mathcal{F}$, зависящие только от a_j, дают условие существования резонанса.

Многочлен $\mathfrak{f}_1$ получается в виде квазиоднородного многочлен от a_j, т. е. его носитель в пространстве векторных показателей степеней коэффициентов a_j лежит в плоскости с нормальным вектором $\mathbf{n} = (1, 2, 3)$. Это позволяет после определённого степенного преобразования уменьшить число переменных полинома $\mathfrak{f}_1$ на 1 и получить условия существования резонансов в виде набора плоских алгебраических кривых.

Этот метод оказался довольно трудоёмким для резонансов общего вида и приводит к очень громоздким выражениям. Его обобщение на случаи со степенями свободы больше 3 авторами не представляется возможным.

5.2 Второй способ вычисления

Для условия (5.1) строится степенное преобразование (см., например, [**BrunoAzimovProg202**]), определяемое матрицей

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

с соответствующей заменой переменных

$$\mu_1 = s_2 s_3, \quad \mu_2 = s_1 s_3, \quad \mu_3 = s_3. \tag{5.3}$$

Это преобразование приводит квадратичную форму (5.1) после сокращения на s_3^2 к квадратичной функции

$$\tilde{R}_3^{(r,q,1)} \equiv q^4 s_1^2 - 2q^2 r^2 s_1 s_2 + r^4 s_2^2 - 2q^2 s_1 - 2r^2 s_2 + 1 = 0,$$

которая, как известно, допускает рациональную параметризацию. Эта параметризация может быть построена таким образом

$$\begin{aligned} s_1 &= \left(\frac{u}{u+2q}\right)^2, \\ s_2 &= \left(\frac{(q+1)u+2q}{r(u+2q)}\right)^2, \\ s_3 &= r^2 v (u+2q)^2, \end{aligned}$$

что параметризация (5.3) корней получится полиномиальной:

$$\begin{aligned} \mu_3 &= v r^2 (u+2q)^2, \\ \mu_2 &= v r^2 u^2, \\ \mu_1 &= v((q+1)u+2q)^2. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Структура параметризации (5.4) такова, что для вещественных значений параметров u, v корни μ_k являются вещественными. Более того, выбирая значения параметра $v \leqslant 0$, получим, что все корни μ_k вещественны и неположительны, что согласно теореме 2 обеспечивает линейную устойчивость. Проверим, что найденное параметрическое представление корней (5.4) обеспечивает выполнение резонансного уравнения (3.3) для вектора $\mathbf{p}^* = (r, q, 1)$. Полагая $v = -w^2$, получаем следующий набор корней

$$\begin{aligned} \lambda_{1,4} &= \pm \mathrm{i} w((q+1)u+2q), \\ \lambda_{2,5} &= \pm \mathrm{i} r w u, \\ \lambda_{3,6} &= \pm \mathrm{i} r w (u+2q). \end{aligned}$$

Тогда непосредственной проверкой получаем

$$r\lambda_1 + q\lambda_5 + \lambda_6 = r\lambda_4 + q\lambda_2 + \lambda_3 = 0.$$

Теперь параметрическое представление корней (5.4) с помощью элементарных симметричных многочленов из формулы (5.2) даёт полиномиальную параметризацию коэффициентов a_k, $k = 1, 2, 3$,

$$\begin{aligned} a_1 = &- v\left[(2r^2 + (q+1)^2)u^2 + 4q(r^2+q+1)u + \right. \\ &\left. + 4q^2(r^2+1)\right], \\ a_2 = &v^2 [\left(r^2 + 2(q+1)^2\right) u^4 + 4q \times \\ &\times \left(r^2 + q^2 + 4q + 3\right) u^3 + \\ &+ 4q^2 \left(r^2 + q^2 + 6q + 7\right) u^2 + \\ &16q^3(q+1)u + 16q^4], \\ a_3 = &- r^4 v^3 u^2 \left(u(q+1) + 2q\right)^2 (u+2q)^2 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Рассматривая формулы (5.5) как полиномиальный идеал относительно переменных u, v, a_1, a_2, a_3 и вычисляя элиминационный идеал для него, можно получить неявное представление резонансного многообразия $\mathcal{R}_3^{(r,q,1)}$ в виде многочлена $R_3^{(r,q,1)}$ от коэффициентов a_j полухарактеристического многочлена $f_3(\mu)$. Его выражение здесь не приводится из-за его громоздкости: этот квазиоднородный многочлен состоит из 19 мономов, коэффициенты которого суть многочлены от элементов r, q вектора $\mathbf{p}^*$.

Заметим, что параметризация (5.5) не является глобальной параметризацией многообразия $\mathcal{R}_3^{(r,q,1)}$, а только той его части, на которой все корни μ_k вещественны. Однако, не представляет труда получить параметризацию в полиномиальной форме всего резонансного многообразия $\mathcal{R}_3^{(r,q,1)}$. Таким образом, доказано следующая

Теорема 4. *Резонансное многообразие $\mathcal{R}_3^{(r,q,1)}$, где $r, q \in \mathbb{Q}$, допускает полиномиальную параметризацию.*

Далее приведём вычисления резонансных многообразий, соответствующих сильным резонансам согласно списка предыдущего раздела.

5.3 Вычисление условия двухчастотного резонанса

Рассмотрим случай двухчастотного резонанса: $\mathbf{p}^* = (q, 1, 0)$, где $q \in \mathbb{Q}$. Здесь имеется пара соизмеримых СЧ, а третье СЧ несоизмеримо ни с каким из них. В пространстве параметров такой резонанс описывается в терминах резонансного множества $\mathcal{R}_{q^2}(f_3)$ полухарактеристического многочлена $f(\mu)$ [15], либо в терминах обобщённых дискриминантных множеств $\mathcal{D}_{(q^2,0)}(f_3)$[16].

Вычисления проведём с использованием первого способа из подраздела 5.1.

Для начала составим идеал $\mathcal{J}$, содержащий соотношения зависимости между корнями характеристического и полухарактеристического многочленов вида $\lambda_j^2 - \mu_j, j = 1, 2, 3$, а также резонансное соотношение $q\lambda_1 + \lambda_2$. Первый многочлен исключающего базиса Грёбнера $\mathcal{G}$ этого идеала, с последовательным порядком исключения переменных λ_j, μ_j, $j = 1, 2, 3$, есть многочлен

$$\mathfrak{g}_1 \stackrel{\text{def}}{=} q^2\mu_1 - \mu_2. \tag{5.6}$$

Равенство нулю данного многочлена даёт условие на корни полухарактеристического полинома. Чтобы получить условие на коэффициенты, составляем новый идеал $\mathcal{I}$, включающий в себя полученное условие (5.6) и их связь с коэффициентами a_j многочлена (2.3) через элементарные симметрические многочлены (5.2).

Для идеала $\mathcal{I}$ вычисляем исключающий базис Грёбнера $\mathcal{F}$ с соответствующим порядком исключения переменных μ_j, a_j, $j = 1, 2, 3$. Равенство нулю первого его многочлена

$$\begin{aligned}\mathfrak{f}_1 \stackrel{\text{def}}{=} &(q^4 + q^2 + 1)^3 a_3^2 + q^4(q^2 + 1)^2 a_2^3 + \\ &+ q^4(q^2 + 1)^2 a_1^3 a_3 - q^6 a_1^2 a_2^2 - \\ &- q^2(q^4 + q^2 + 1)(q^4 + 4q^2 + 1) a_1 a_2 a_3,\end{aligned} \tag{5.7}$$

зависящего только от a_j, является условием существования двухчастотного резонанса в общем виде для некоторого рационального значения $q \in \mathbb{Q}$.

Проверим полученный результат, сравнивая с полученными ранее условиями для случая, когда $q = 1, 2, 3$. Если в полученных в [16] формулах обобщённых дискриминантов для f_3 положить $\omega = 0$, а $q = q^2$, то получим совпадающие с точностью до знака выражения для соответствующих резонансных многообразий:

- при $q = 1$ условие принимает вид

$$R_3^{(1,1,0)} \stackrel{\text{def}}{=} 4a_1^3a_3 - a_1^2a_2^2 - 18a_1a_2a_3 + 4a_2^3 + 27a_3^2 = 0, \tag{5.8}$$

- при $q = 2$ оно имеет вид

$$R_3^{(2,1,0)} \stackrel{\text{def}}{=} 400a_1^3a_3 - 64a_1^2a_2^2 - 2772a_1a_2a_3 + 400a_2^3 + 9261a_3^2 = 0, \tag{5.9}$$

- а при $q = 3$ оно выглядит

$$R_3^{(3,1,0)} \stackrel{\text{def}}{=} 8100a_1^3a_3 - 729a_1^2a_2^2 - 96642a_1a_2a_3 + 8100a_2^3 + 753571a_3^2 = 0. \tag{5.10}$$

Для выражения (5.7) соответственно со вторым способом из подраздела 5.2 производим степенное преобразование с аналогичной заменой переменных вида (5.3) и использую выражения (5.2), получаем параметрические представления коэффициентов

$$\begin{aligned} a_1 &= - s_3\left(\left(q^2+1\right)s_2+1\right), \\ a_2 &= \ \ s_2s_3^2\left(q^2\left(s_2+1\right)+1\right), \\ a_3 &= - s_2^2s_3^3q^2. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Зная параметризацию коэффициентов можно найти параметрическое представление многообразия (5.7) для произвольного значения q, а так же для каждого из случаев при $q = 1, 2, 3$. Ранее, в работе авторов [13] было использовано степенное преобразование

$$a_1 = 3\nu_3, \quad a_2 = 3\nu_1\nu_3^2, \quad a_3 = \nu_2\nu_3^3, \tag{5.12}$$

которое позволило каждое из резонансных многообразий, представленных в виде нулей квазиоднородных многочленов $R_3^{\mathbf{P}^*}$ от трёх переменных a_1, a_2, a_3 привести к алгебраическим кривым $\tilde{R}_3^{\mathbf{P}^*}$ от двух переменных ν_1, ν_2. Для этих кривых в указанной выше работе были вычислены соответствующие рациональные параметризации. Здесь аналогичная параметризация кривой $\tilde{R}_3^{(q,1,1)}$ легко получается с помощью обращения степенного преобразования (5.12) и подстановки (5.11):

$$\left\{\nu_1 = \frac{3s_2\left(q^2s_2+q^2+1\right)}{\left(q^2s_2+s_2+1\right)^2}, \quad \nu_2 = \frac{27s_2^2q^2}{\left(q^2s_2+s_2+1\right)^3}\right\}.$$

Таким образом, для многообразий (5.8), (5.9) и (5.10) получаются рациональные параметризации соответствующих алгебраических кривых в следующем виде:

- Для $R_3^{(1,1,0)}$:

$$\left\{\nu_1 = \frac{3s_2\left(s_2+2\right)}{\left(2s_2+1\right)^2}, \quad \nu_2 = \frac{27s_2^2}{\left(2s_2+1\right)^3}\right\};$$

- для $R_3^{(2,1,0)}$:

$$\left\{\nu_1 = \frac{3s_2\left(4s_2+5\right)}{\left(5s_2+1\right)^2}, \quad \nu_2 = \frac{108s_2^2}{\left(5s_2+1\right)^3}\right\};$$

- для $R_3^{(3,1,0)}$:

$$\left\{\nu_1 = \frac{3s_2\left(9s_2+10\right)}{\left(10s_2+1\right)^2}, \quad \nu_2 = \frac{243s_2^2}{\left(10s_2+1\right)^3}\right\}.$$

Данные параметризации позволяют изобразить указанные многообразия на плоскости переменных (ν_1, ν_2).

5.4 Вычисление условия трёхчастотного резонанса

В случае трёхчастотного резонанса его кратность может быть равна 1 или 2. Если кратность $\mathfrak{k} = 2$, то это означает, что имеет место попарная соизмеримость между базисными частотами λ_j характеристического многочлена. Такая ситуация исследуется с помощью условий существования двухчастотного резонанса пункта 5.3. Далее рассматриваем только случай кратности 1.

Например, в случае базисных частот $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 2+\sqrt{2}$, $\lambda_3 = 2-\sqrt{2}$ собственные значения попарно несоизмеримы, но их взвешенная сумма с резонансным вектором $\mathbf{p}^* = (2,1,1)$ равна нулю. Это означает, что существует трёхчастотный резонанс кратности 1 порядка 4. Поэтому мы рассмотрим случай, когда взвешенная алгебраическая сумма всех трёх базисных собственных значений $\lambda_j (j = 1,2,3)$ равна нулю для некоторого вектора $\mathbf{p}^* \in \mathbb{Z}^3$, т. е. $\langle \mathbf{p}^*, \boldsymbol{\lambda} \rangle = 0$.

Для резонансного вектора $\mathbf{p}^*$ общего вида $\mathbf{p}^* = (r, q, 1)$ параметризация соответствующего резонансного многообразия $\mathcal{R}_3^{\mathbf{p}^*}$ была получена выше в п. 5.2. Подставляя $r = q = 1$, получим параметризацию многообразия $\mathcal{R}_3^{(1,1,1)}$ в виде

$$\begin{aligned}
a_1 =& -2v\left(3(u+1)^2+1\right),\\
a_2 =& v^2\left(3(u+1)^2+1\right)^2,\\
a_3 =& -4u^2v^3(u+1)^2(u+2)^2.
\end{aligned}$$

Здесь нетрудно видеть, что соответствующее неявное представление многообразия имеет вид:

$$R_3^{(1,1,1)} \stackrel{\text{def}}{=} a_1^2 - 4a_2 = 0. \tag{5.13}$$

Непосредственные вычисления показывают, что при $r = q = 1$ многочлен $R_3^{(r,q,1)}$, неявно описанный в подпункте 5.2, есть шестая степень многочлена (5.13).

Подставляя $r = 2$, $q = 1$, получим параметризацию многообразия $\mathcal{R}_3^{(2,1,1)}$ в виде

$$\begin{aligned}
a_1 =& -4v\left(3(u+1)^2+2\right),\\
a_2 =& 16v^2\left(3(u+1)^4+1\right),\\
a_3 =& -64u^2v^3(u+1)^2(u+2)^2.
\end{aligned}$$

Здесь исключая переменные u, v получаем соответствующее неявное представление многообразия:

$$\begin{aligned}
R_3^{(2,1,1)} \stackrel{\text{def}}{=}& 16a_1^6 - 264a_1^4a_2 + 36a_1^3a_3 + 1425a_1^2a_2^2 - \\
&- 630a_1a_2a_3 - 2500a_2^3 + 9261a_3^2 = 0.
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Непосредственные вычисления показывают, что при $r = 2$, $q = 1$ многочлен $R_3^{(r,q,1)}$ есть полный квадрат многочлена (5.14).

Здесь левые части формул (5.13) и (5.14) суть квазиоднородные многочлены, допускающие с помощью подстановки (5.12) приведение к многочленам от двух переменных ν_1, ν_2. Эти многочлены определяют алгебраические кривые, рациональные параметризации которых имеют следующий вид.

Для $\mathcal{R}_3^{(1,1,1)}$:

$$\left\{\nu_1 = \frac{3}{4}, \quad \nu_2 = \frac{27u^2\left(u^2-1\right)}{2\left(3u^2+1\right)^3}\right\}. \tag{5.15}$$

Для $\mathcal{R}_3^{(2,1,1)}$:

$$\left\{\nu_1 = \frac{3\left(768u^4+1\right)}{4\left(24u^2+1\right)^2},\ \nu_2 = \frac{54u^2\left(16u^2-1\right)}{\left(24u^2+1\right)^3}\right\}. \tag{5.16}$$

Как уже было отмечено выше, формулы (5.15) и (5.16) дают параметризацию не всей кривой, а только той её части, на которой многочлен f_3 имеет только вещественные корни.

Пользуясь параметрическим представлением образов резонансных многообразий, можно построить плоские алгебраические кривые на координатной плоскости (ν_1, ν_2).

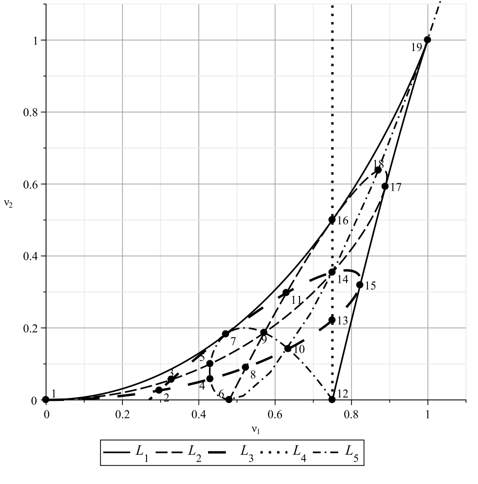

Рис. 1: Резонансные многообразия в переменных ν_1, ν_2.

Для полного представления о взаимном расположении многообразий, соответствующих сильным резонансам, дадим описание рис. 1. Кривые обозначим символами $L_k, k = 1, ..., 5$. Их особые точки, а также точки их взаимного пересечения обозначим символами P_j, где нумерация индексов j точек выбрана в соответствии с увеличением расстояния от начала координат.

Кривая L_1 играет особую роль, она задаёт границу области устойчивости ПР по линейному приближению. Эта кривая является образом дискриминантного множества $\mathcal{D}(f_3)$, которое делит пространство коэффициентов $\mathbb{K}$ многочлена третьей степени на две части. В одной части все корни многочлена вещественные, а в другой части имеется пара комплексно сопряжённых корней и один вещественный корень. Согласно теореме 2, криволинейный треугольник

$P_1P_{19}P_{12}$ является границей области Σ. Остальные резонансные кривые полностью или частично располагаются внутри этой области. Резонансные кривые L_2 и L_3, соответствующие двухчастотному резонансу, полностью располагаются в ней, касаясь кривой L_1. Это связано с тем, что если есть две частоты участвующие в резонансе, то они как корни характеристического уравнения должны быть одной природы – либо одновременно вещественные, либо одновременно комплексные. Но пара комплексно сопряжённых корней не может находиться в резонансе, а третий корень всегда должен быть вещественным. Отметим, что ранее кривые L_1, L_2 и L_3 были изображены в [15], но их параметризации были получены другим способом.

Ещё два резонансных многообразия, образами которых являются кривые L_4 и L_5, соответствуют трёхчастотным резонансам. В них, в отличие от двух частотных резонансов, могут участвовать корни различной природы. Это говорит о том, что трёхчастотные резонансные многообразия будут находиться и в области вещественности корней, и в области, где существуют комплексные корни. Во всех изображённых точках на кривых кратность резонанса $\mathfrak{k}$ становится равной 2.

Ранее, в [16] было показано, что резонансное многообразие $\mathcal{R}_3^{(q,1,0)}$, соответствующее двухчастотному резонансу, имеет одномерное многообразие особых точек самопересечения. Используя параметризацию (5.5) покажем, что все резонансные многообразия $\mathcal{R}_3^{(r,1,1)}$ при $q \neq 1$ имеют однопараметрическое множество особых точек самопересечения. Для этого подставим в указанную параметризацию значение $q = 1$ и, повторяя выкладки п. 5.3, получим общую параметризацию соответствующей кривой для произвольного значения r:

$$\nu_1 = \frac{3\left(r^6(r^2+8)u^4 - 2r^2(r^2-4)u^2+1\right)}{4\left(r^2(r^2+2)u^2+1\right)^2}, \quad \nu_2 = \frac{27r^2u^2\left(r^4u^2-1\right)^2}{2\left(r^2(r^2+2)u^2+1\right)^3}.$$

Эта параметризация после исключения параметра u даёт неявное представление алгебраической кривой в виде

$$\begin{aligned}\tilde{R}_3^{(r,1,1)} = &-108(r^2+1)^4\nu_1^3 + 81(r^4+10r^2+1)\times\\ &\times(r^2+1)^2\nu_1^2 - 18(r^4-9)(r^4-1)(r^2-1)\nu_1\nu_2+\\ &+(r^2-1)^3(r^2+3)^3\nu_2^2 - 486r^2(r^4+4r^2+1)\nu_1+\\ &+54(r^4-3r^2-2)(r^2-1)^2\nu_2 + 729r^4 = 0.\end{aligned} \tag{5.17}$$

Особые точки алгебраической кривой – это точки, в которых обнуляются само уравнение кривой и обе её первые частные производные. Полученную полиномиальную систему решаем относительно переменных ν_1, ν_2, рассматривая r в качестве параметра:

$$\nu_1^* = \frac{6r^4+3r^2+3}{(r^2+3)\left(r^2+1\right)^2}, \quad \nu_2^* = \frac{27\left(r^2-1\right)^2}{(r^2+1)\left(r^2+3\right)^3}.$$

Остаётся показать, что найденная особая точка с координатами (ν_1^*, ν_2^*) есть точка самопересечения. Для этого достаточно разложить многочлен (5.17) в этой точке до квадратичных членов включительно и убедиться, что полученная квадратичная форма раскладывается на два линейных множителя.

6. Пример

Рассмотрим три математических маятника одинаковой длины l, точки подвеса которых расположены на равных расстояниях d на горизонтальной прямой, а массы маятников выбраны равными $\mathbf{m} = (1, \alpha, 1)$ соответственно. Пусть маятники соединены между собой невесомыми линейно упругими пружинами жёсткости k длиной d в недеформированном состоянии. Точки прикрепления пружин расположены на расстоянии $b \leqslant d$ от точек подвеса маятников (см. рис. 2).

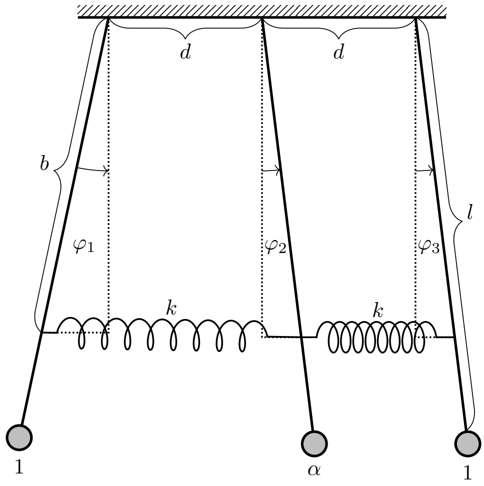

Рис. 2: Три плоских математических маятника, соединённые невесомыми пружинами.

Выбрав в качестве обобщённых координат $\boldsymbol{\varphi}$ углы φ_i, $i = 1, 2, 3$, отклонения маятников от вертикали, запишем функцию Лагранжа этой системы

$$L(\boldsymbol{\varphi}, \dot{\boldsymbol{\varphi}}) = \frac{1}{2} \langle T\dot{\boldsymbol{\varphi}}, \dot{\boldsymbol{\varphi}} \rangle + \Pi. \tag{6.1}$$

Матрица T диагональна: $T = \operatorname{diag}(l^2, \alpha l^2, l^2)$. Потенциальная энергия Π есть сумма потенциальной энергии упругой деформации пружин Π_1 и энергии Π_2 математических маятников в однородном поле силы тяжести:

$$\begin{aligned}
\Pi_1 =& \frac{k}{2} \sum_{j=1}^{2} \left\{ \sqrt{\left(\Delta_j^{(1)}\right)^2 + \left(\Delta_j^{(2)}\right)^2} - d \right\}^2, \\
\Pi_2 =& -gl \sum_{j=1}^{3} \cos\varphi_j - gl(\alpha - 1)\cos\varphi_2,
\end{aligned}$$

где $\Delta_j^{(1)} = b\left(\cos\varphi_{j+1} - \cos\varphi_j\right)$ и $\Delta_j^{(2)} = b(\sin\varphi_{j+1} - \sin\varphi_j) + d$ суть проекции величин деформаций пружин между j-м и $j+1$-м маятниками на оси абсцисс и ординат соответственно. Следуя [17], введём безразмерные переменные $\tau = \sqrt{g/l}\, t, \quad \beta = b^2 k/(gl)$.

Перейдём к гамильтоновой форме уравнений движения, но при этом будем использовать новые канонические переменные, определяемые нормальными модами колебаний. Для этого раскладываем функцию Лагранжа (6.1) в ряд Тейлора в окрестности положения равновесия $\boldsymbol{\varphi} = 0$, получим линейную систему уравнений Лагранжа с СЧ

$$\boldsymbol{\lambda} = \left(1, \sqrt{1+\beta}, \sqrt{\beta\alpha + 2\beta + 1}\right).$$

Этим частотам соответствуют амплитудные векторы

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix}1\\-2/\alpha\\1\end{pmatrix},$$

которые задают матрицу перехода $U = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ к новым переменным $\mathbf{Q}$: $\boldsymbol{\varphi} = U\mathbf{Q}$. Переход к канонически сопряжённым импульсам $\mathbf{P}$ осуществляется с помощью матрицы $\mathbf{p} = (U^*)^{(-1)}$:

$$\mathbf{p} = (A^*)^{(-1)}\,\mathbf{P}, \text{ где } \mathbf{p} = gl\,\langle \mathbf{m}, \dot{\boldsymbol{\varphi}}\rangle\,.$$

Здесь звёздочка означает транспонирование.
Тогда в новых переменных разложение функции Гамильтона вблизи начала координат имеет вид

$$H(\mathbf{Q},\mathbf{P}) = H_2(\mathbf{Q},\mathbf{P}) + H_4(\mathbf{Q},\mathbf{P}) + \cdots\,, \tag{6.2}$$

где первые два члена разложения следующие:

$$\begin{aligned} H_2 =& \frac{2P_1^2}{2+\alpha} + P_2^2 + \frac{\alpha P_3^2}{2+\alpha} + \left(1+\frac{\alpha}{2}\right)Q_1^2 + \\ &+ (\beta+1)\,Q_2^2 + \frac{(2+\alpha)\,(\beta\alpha+\alpha+2\beta)\,Q_3^2}{\alpha^2}, \\ H_4 =& -\frac{(2+\alpha)\,Q_1^4}{24} - \frac{(2\beta+1)\,Q_1^2Q_2^2}{2} - \\ &- \frac{(2+\alpha)\,(2\beta\alpha+\alpha+4\beta)\,Q_1^2Q_3^2}{2\alpha^2} - \\ &- \frac{(3\beta\alpha+\alpha+2\beta)\,Q_1Q_2^2Q_3}{\alpha} - \\ &- \frac{\left(\alpha^2-4\right)(3\beta\alpha+\alpha+6\beta)\,Q_1Q_3^3}{3\alpha^3} - \\ &- \frac{(4\beta+1)\,Q_2^4}{12} - \frac{(4\beta\alpha+\alpha+4\beta)\,Q_2^2Q_3^2}{2\alpha} - \\ &- \frac{(2+\alpha)\left(\alpha^2-2\alpha+4\right)(4\beta\alpha+\alpha+8\beta)\,Q_3^4}{12\alpha^4}. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Все дальнейшие вычисления выполнялись в СКА `Maple` согласно схемы раздела 5.
Поскольку в (6.2) $H_3(\mathbf{Q},\mathbf{P}) \equiv 0$, то резонансы порядка $\mathfrak{q} = 3$ проявят себя при приведении к НФ только в формах степени 6 и выше. Следовательно, в данном случае можно ограничиться исследованием резонансов порядка $\mathfrak{q} = 4$, а именно:

- в случае двухчастотного резонанса исследуем многообразие $\mathcal{R}_3^{(3,1,0)}$;
- в случае трёхчастотного резонанса исследуем многообразие $\mathcal{R}_3^{(2,1,1)}$.

Обозначим через $A(H_2)$ матрицу квадратичной формы (6.3), тогда полухарактеристический многочлен матрицы $JA(H_2)$, соответствующей линейной системы Гамильтона, есть

$$\begin{gathered}f(\mu) = \mu^3 + \frac{(2\beta\alpha + 3\alpha + 2\beta)\,\mu^2}{\alpha} + \\ + \frac{\left(\beta^2\alpha + 4\beta\alpha + 2\beta^2 + 3\alpha + 4\beta\right)\mu}{\alpha} + \\ + \frac{(\beta\alpha + \alpha + 2\beta)\,(\beta + 1)}{\alpha}.\end{gathered} \tag{6.4}$$

Таким образом, пространство параметров $\Pi \equiv (\alpha, \beta)$ задачи двумерно и значения параметров должны быть неотрицательны: $\{\alpha, \beta \geqslant 0\}$. Квадратичная форма (6.3) в указанной области пространства параметров является знакоопределённой, следовательно, нижнее равновесное положение маятников является устойчивым по Ляпунову. Поэтому далее будет приведено описание резонансных множеств 4-го порядка.

Подставляем коэффициенты a_1, a_2, a_3 многочлена (6.4) в уравнение (5.10) резонансного многообразия $\mathcal{R}_3(3,1,0)$, раскладываем его на множители и отбираем среди них только те, нули которых располагаются в первом квадранте плоскости (α, β). Аналогично поступаем и с уравнением (5.14) резонансного многообразия $\mathcal{R}_3(2,1,1)$. В результате получается пять резонансных кривых: три соответствуют двухчастотному резонансу, а два — трёхчастотному:

$$\mathcal{R}_a^{(3,1,0)} \stackrel{\text{def}}{=} \beta = \frac{8\alpha}{2+\alpha}, \tag{6.5}$$

$$\mathcal{R}_b^{(3,1,0)} \stackrel{\text{def}}{=} \beta = 8, \tag{6.6}$$

$$\mathcal{R}_c^{(3,1,0)} \stackrel{\text{def}}{=} \beta = \frac{4\alpha}{1-4\alpha}, \tag{6.7}$$

$$\mathcal{R}_a^{(2,1,1,)} \stackrel{\text{def}}{=} \beta = 4\alpha^2 + 4\alpha, \tag{6.8}$$

$$\mathcal{R}_b^{(2,1,1)} \stackrel{\text{def}}{=} \beta = \frac{8\alpha\,(2-\alpha)}{(3\alpha-2)^2}. \tag{6.9}$$

Эти кривые показаны на рис. 3, на котором, двухчастотные резонансные кривые изображены сплошными и штриховыми линиями, а трёхчастотные — штрих-пунктирными.

Кривые обозначим символами $L_k^i, k = 3, 5, i = a, b, c$, где нижний индекс соответствует индексу кривых L_k, описанных в подпункте 5.4. Их точки взаимного пересечения обозначим символами P_j, где нумерация индексов j точек выбрана в соответствии с увеличением расстояния от начала координат. Дадим краткое описание структуры СЧ на соответствующих резонансных кривых.

1. На кривой L_3^a, которая изображена длинной штриховой линией, с уравнением (6.5) СЧ следующие: $\lambda_{1,4} = \pm\mathrm{i}$, $\lambda_{2,5} = \pm\mathrm{i}\sqrt{(9\alpha+2)/(\alpha+2)}$, $\lambda_{3,6} = \pm 3\mathrm{i}$. Таким образом, для всех значений параметра α имеет место двухчастотный резонанс, кроме значения $\alpha = 6/5$, соответствующего точке P_1 (см. ниже).
2. На прямой L_3^b показанной в виде сплошной линии с уравнением (6.6) СЧ следующие: $\lambda_{1,4} = \pm\mathrm{i}$, $\lambda_{2,5} = \pm 3\mathrm{i}$, $\lambda_{3,6} = \pm\mathrm{i}\sqrt{(9\alpha+16)/\alpha}$. Эта прямая пересекается с другими кривыми в трёх точках: P_2, P_3, P_4.
3. На кривой L_3^c, которая изображена короткой штриховой линией, с уравнением (6.7) СЧ следующие:

$$\lambda_{1,4} = \pm\mathrm{i}, \lambda_{2,5} = \pm\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{1-4\alpha}}, \lambda_{3,6} = \pm\frac{3\mathrm{i}}{\sqrt{1-4\alpha}}.$$

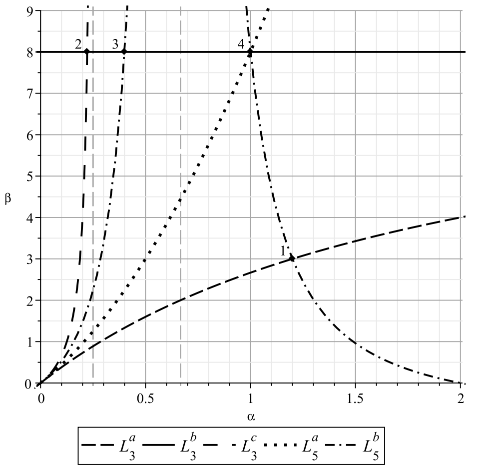

Рис. 3: Резонансные многообразия примера в переменных α, β.

4. На кривой L_5^a изображённой в виде пунктирной линии с уравнением (6.8) СЧ следующие:

$$\lambda_{1,4} = \pm \mathrm{i}, \lambda_{2,5} = \pm \mathrm{i}(2\alpha + 1), \lambda_{3,6} = \pm \mathrm{i}(2\alpha + 3).$$

На этой кривой для всех значений α имеет место трёхчастотный резонанс, кроме значения $\alpha = 1$, соответствующего точке P_4.

5. На кривой L_5^b изображённой в виде штрих-пунктирной линии с уравнением (6.9) СЧ следующие:

при $0 \leqslant \alpha < 2/3$

$$\lambda_{1,4} = \pm \mathrm{i}, \quad \lambda_{2,5} = \pm \mathrm{i}\frac{\alpha + 2}{2 - 3\alpha}, \qquad \lambda_{3,6} = \pm \mathrm{i}\frac{6 - \alpha}{2 - 3\alpha};$$

при $\alpha > 2/3$

$$\lambda_{1,4} = \pm \mathrm{i}, \quad \lambda_{2,5} = \pm \mathrm{i}\frac{\alpha + 2}{3\alpha - 2}, \qquad \lambda_{3,6} = \pm \mathrm{i}\frac{6 - \alpha}{3\alpha - 2}.$$

На этой кривой для всех значений α имеет место трёхчастотный резонанс, кроме точек P_2, P_3,P_4.

Кривая L_3^a пересекается только с одной ветвью кривой L_5^b в точке $P_1 = (6/5, 3)$. Подставив в выражения (6.4) значения переменных α, β, являющихся координатами точки P_1, получим

$$f_3 = (\mu + 1)(\mu + 4)(\mu + 9).$$

Корнями этого полухарактеристического многочлена являются значения $\mu_1 = -1$, $\mu_2 = -4$, $\mu_3 = -9$. А в корнях характеристического уравнения они запишутся в виде

$$\lambda_{1,4} = \pm \mathrm{i}, \quad \lambda_{2,5} = \pm 2\mathrm{i}, \quad \lambda_{3,6} = \pm 3\mathrm{i}.$$

Зная значения корней, проверим выполнение резонансных соотношений. Так как точка P_1 принадлежит двум резонансным многообразиям, соответствующим двухчастотному и трёхчастотному резонансу, проверим эти условия для каждого из них:

1. для $\mathcal{R}_a^{(3,1,0)}$ имеются 2 пары соизмеримых корней с отношением $3 : 1$, т. е. $3\lambda_1 + \lambda_6 = 3\lambda_4 + \lambda_3 = 0$.

2. для $R_b^{b(2,1,1)}$ также должно выполняться соотношение 2 : 1 : 1, которое выглядит как:
   $\lambda_1 + 2\lambda_5 + \lambda_3 = \lambda_4 + 2\lambda_2 + \lambda_6 = 0.$

Кривая L_3^b пересекается с кривой L_3^c в точке P_2 = (2/9, 8), с кривой L_5^b в точке P_3 = (2/5, 8) и P_4 = (1, 8). В точке P_4 она также пересекается с кривой L_5^a . Подставив в выражения (6.4) значения переменных α, β, являющихся координатами этих точек, получим соответствующие выражения для f_3:

$P_2 : f_3 = (\mu + 1)(\mu + 9)(\mu + 81);$
$P_3 : f_3 = (\mu + 1)(\mu + 9)(\mu + 49);$
$P_4 : f_3 = (\mu + 1)(\mu + 9)(\mu + 25).$

Аналогично, как и в вышеуказанном случае, здесь можно убедиться в выполнении резонансных соотношений.

7. Заключение

Для системы Гамильтона с тремя степенями свободы предложен способ символьного вычисления резонансного многообразия, соответствующего резонансу общего вида, а также доказано, что это многообразие допускает полиномиальную параметризацию. Предлагается схема исследования областей формальной устойчивости положения равновесия системы Гамильтона с тремя степенями свободы.

Список литературы / References

[1]. Moser J.K. New aspects in the theory of stability of hamiltonian systems. B Comm. PureAppl. Math. Том 11, № 1, страницы 81—114, 1958.

[2]. Батхин А.Б., Хайдаров З.Х. Сильные резонансы в нелинейной системе Гамильтона. ПрепринтыИПМ им. М.В. Келдыша, (59): 1—28, 2022. DOI: https://doi.org/10.20948/prepr-2022-59.

[3]. Зигель К., Мозер Ю. Лекции по небесной механике. НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»: 384, 2001.

[4]. Батхин А.Б., Брюно А.Д., Варин В.П. Множества устойчивости многопараметрических гамильтоновых систем. Прикладная математика и механика, том 76, №1,страницы 80—133, 2012.

[5]. Калинина Е. А., Утешев А.Ю. Теория исключения: Учеб. пособие. НИИ химии СПбГУ, СПб, 2002.

[6]. Basu S., Rollack R., Roy M.F. Algorithms in real algebraic geometry. Algorithms andComputations in Mathematics 10, 2006.

[7]. Брюно А.Д. Аналитическая форма дифференциальных уравнений (II). Встраницы 199—239, 1972.

[8]. Брюно А.Д. Ограниченная задача трех тел: Плоские периодические орбиты. Наука,1990.

[9]. Биркгоф Дж.Д. Динамические системы. Изд. дом «Удмуртский университет», Ижевск, 1999.

[10]. Bruno A.D. Survey of eight modern methods of Hamiltonian mechanics. B том 10, № 4, 2021. DOI: https://doi.org/10.3390/axioms10040293.

[11]. Брюно А. Д. О формальной устойчивости систем Гамильтона. Мат. заметки, том 1, № 3, страницы 325—330, 1967.

[12]. Журавлев В.Ф., Петров А.Г., Шундерюк М.М. Избранные задачи гамильтоновой механики. ЛЕНАНД, 2015.

[13]. Батхин А.Б., Хайдаров З.Х. Вычисление условия сильного резонанса в системе Гамильтона. В ЖВМиМФ, том 63, № 5, страницы 697—714, 2023. DOI: 10.31857/S0044466923050071.

[14]. Брюно А.Д., Азимов А.А. Вычисление унимодулярных матриц степенных преобразований. Программирование, том 49, № 1, страницы 38—47, 2023. DOI: 10.31857/S013234742301003X.

[15]. Батхин А. Б. Резонансное множество многочлена и проблема формальной устойчивости. Вестник ВолГУ. Серия 1. Математика. Физика, том 35, №4, страницы 5—23, 2016. DOI: https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2016.4.1.
[16]. Батхин А.Б. Параметризация множества, определяемого обобщенным дискриминантом многочлена. Программирование, страницы 5—17, 2018.
[17]. Маркеев А.П. О движении связанных маятников. Нелинейная динамика, том 9, № 1, страницы 27—38, 2013.

Информация об авторах / Information about authors

Александр Борисович БАТХИН — доктор физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. Сфера научных интересов: гамильтонова и небесная механика, разрешение особенностей алгебраических и дифференциальных уравнений, полиномиальная компьютерная алгебра, численно-аналитические методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Alexander Borisovich BATKHIN — Doctor of Physics and Mathematics, Associated Professor, senior researcher of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS. Research interests: Hamiltonian and Celestial Mechanics, resolution of singularities of algebraic and differential equations, polynomial computer algebra, numerical and analytical solutions to ordinary differential equations.

Зафар Хайдар угли ХАЙДАРОВ – ассистент преподаватель кафедры Алгебры и геометрии Математического факультета Самаркандского государственного университета имени Ш.Рашидова. Сфера научных интересов: степенная геометрия, базисы Грёбнера, алгебраические структуры, системы Гамильтона.

Zafar Khaydar ugli KHAYDAROV — assistant teacher of the Department of Algebra and Geometry, Faculty of Mathematics, Samarkand State University named after Sh.Rashidov. Research interests: power geometry, Gröbner basis, algebraic structures, Hamiltonian systems.