

DOI: 10.15514/ISPRAS-2024-36(4)-15



## К моделированию задачи осаждения твердой частицы в вязкой несжимаемой жидкости методом гидродинамики сглаженных частиц (SPH)

*И.И. Потапов, ORCID: 0000-0002-3323-2727 <potapov2i@gmail.com>*

*О.В. Решетникова, ORCID: 0000-0002-0099-3589 <ov13r@yandex.ru>*

*Вычислительный центр Дальневосточного отделения Российской академии наук,  
Россия, 680000, г. Хабаровск, ул. Ким-Ю-Чена, д. 65*

**Аннотация.** В работе сформулирована и решена задача определения гидравлической крупности для единичной частицы. Для решения задачи предложена оригинальная разновидность метода сглаженных частиц (SPH), в котором осаждаемая частица оказывает влияние на движение окружающих ее частиц воды, но расчет сил, действующих на частицу (кроме силы, учитывающих эффекты присоединенной массы), выполняется по формулам аналитической механики для материальной точки. Верификация предложенной математической постановки и реализующего ее алгоритма расчета выполнена с использованием открытого авторского кода «SPH\_Lab2d». Получены зависимости для гидравлической крупности частицы от ее диаметра для различных случаев дискретизации объема жидкости. Численные результаты демонстрируют хорошую согласованность с экспериментальными данными и известными феноменологическими зависимостями для кварцевого песка.

**Ключевые слова:** гидравлическая крупность, метод SPH, составное ядро, радиус сглаживания, открытое программное обеспечение.

**Для цитирования:** Потапов И.И., Решетникова О.В. К моделированию задачи осаждения твердой частицы в вязкой несжимаемой жидкости методом гидродинамики сглаженных частиц (SPH). Труды ИСП РАН, том 36, вып. 4, 2024 г., стр. 191–202. DOI: 10.15514/ISPRAS-2024-36(4)-15.

# On Modeling the Grain Settling through Viscous Incompressible Fluid Problem using Smoothed Particle Hydrodynamics Method

*I.I. Potapov, ORCID: 0000-0002-3323-2727 <potapov2i@gmail.com>*

*O.V. Reshetnikova, ORCID: 0000-0002-0099-3589 <ov13r@yandex.ru>*

*Computer center of Far East Branch of the Russian Academy of Sciences  
65 Kim U Chena Street, Khabarovsk City, 680000 Russian Federation*

**Abstract.** In this paper was formulates the settling velocity determining problem for a single particle. To solve it, an original version of the smoothed particle method (SPH) is proposed where settling particle affects on surrounding fluid particles movement. Herewith the calculation of forces acting on particle (except for inertial forces which takes attached mass effect) is performed according by analytical mechanics formulas for a material point. This mathematical formulation and calculation algorithm was verificated by using open source code «SPH\_Lab2d». Dependences for the particle settling velocity on its diameter are obtained for various cases of fluid volume discretization. The results demonstrate a good conformance this property to values, that determined by the experimental data and known phenomenological dependences for quartz sand.

**Keywords:** settling velocity, mesh-free SPH method, composite kernel, smoothing radius, open source software.

**For citation:** Potapov I. I., Reshetnikova O. V. On modeling the grain settling through viscous incompressible fluid problem using smoothed particle hydrodynamics method. *Trudy ISP RAN/Proc. ISP RAS*, vol. 36, issue 4, 2024. pp. 191-202 (in Russian). DOI: 10.15514/ISPRAS-2024-36(4)-15.

## 1. Введение

Моделирование русловых процессов находит множество практических применений – от проектирования конструкций и судоходных трасс до прогнозирования чрезвычайных ситуаций и их последствий. Важным механизмом изменения формы русла является процесс движения донных частиц, математическое описание которого одним из параметров включает среднюю скорость падения (осаждения) твердой частицы в стоячей воде.

Движение донных частиц (взвешивание и осаждение) характеризуется наличием сильнодеформируемых границ – донной поверхности, а также свободно перемещаемых разрозненных (в том числе и единичных) гранул твердой фракции в расчетном объеме.

В настоящее время при моделировании процессов взвешивания и осаждения донных частиц доминируют сеточные методы [1] разработанные для решения задач механики сплошных сред. Существуют многочисленные примеры таких исследований с более чем вековой историей [2]. Однако классические сеточные методы сталкиваются с известными трудностями при описании воздушно-песчаных или водно-песчаных смесей высокой концентрации [3], которые обусловлены необходимостью построения уравнений состояния многофазной среды и сложностью верификации таких уравнений.

Следует отметить, что разностные или проекционные сеточные методы разработаны для решения задач механики сплошных сред. Но сыпучий материал (песок) как дискретная среда имеет характерные пространственные и временные масштабы, ограничивающие возможности его описания уравнениями механики сплошных сред, поскольку не всегда оказывается выполнимым предельный переход, когда сыпучесть среды приводит к хаотизации процессов развития донной неустойчивости [4, 5, 6] (хорошо известные донные волны). По этой причине использование проекционно-сеточных методов для численной реализации моделей движения высоконаполненных водно-песчаных смесей требует формулировки сложных реологических моделей, для валидации которых часто отсутствуют экспериментальные данные.

Авторам на данный момент не известны математические модели и соответственно сеточные методы, позволяющие корректно моделировать данные явления. Определенное

преимущество здесь получают бессеточные методы моделирования водно-песчаных смесей, поскольку позволяют не выполнять предельного перехода для гранулометрической фазы, т.е. не рассматривать ее как сплошную среду. В настоящее время ведутся активные исследования в данном направлении [7], например возможностями платформы «OpenFOAM 2.0.0: Particle Tracking» исследуются комбинации сеточных методов для описания гидродинамики и DEM методов для описания твердой фазы.

Также известны работы по моделированию водогрунтовых потоков методом SPH. Однако здесь для случаев движения единичных гранул твердой фракции в жидкости, или просто незначительных ее объемов (в сравнении с расчетным) имеет место нефизичность получаемого решения [8] в связи с ошибками определения плотности фазы при использовании классического SPH-подхода. Поэтому зачастую предлагается не учитывать в решении (относить к погрешности) случаи обособленного расположения гранул в объеме жидкости, а рассматривать движение только макрообъемов твердой фазы. В работе [9], посвященной моделированию всплывания пузырьков газа в жидкости (задача, обратная осаждению) означенную проблему предлагается компенсировать присвоением фракции газа повышенной на несколько порядков плотности, чтобы она составляла не менее одной десятой доли от плотности жидкости. Понятно, что модели с подобными параметрами также неадекватны физической природе процессов.

Особенностью данной работы является попытка описания жидкой среды и движения в ней твердых гранул SPH методом, оставаясь в рамках механики сплошных сред. Для гранулы твердого материала здесь используется комбинация подходов классической механики материальной точки и SPH подхода для учета обратного ее влияния на жидкую среду. Авторы на данный момент ведут исследовательский поиск возможностей такого подхода, решая различные модельные верификационные задачи.

## 2. Постановка задачи

В работе исследуется процесс осаждения сферической твердой частицы в вязкой ламинарной тяжелой несжимаемой жидкой среде. Расчетная область задачи  $\Omega$  и ее границы  $\Gamma_i$ , приведены на рис. 1.

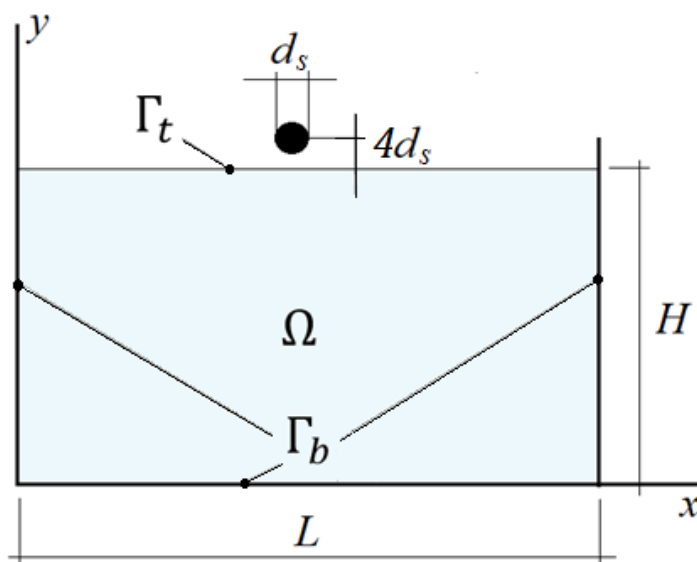


Рис. 1. Представление расчетной области задачи.

Fig. 1. Task computational domain presentation.

Математическая модель задачи включает уравнения Навье-Стокса, описывающие жидкую среду

$$\rho_f \frac{d\mathbf{u}_f}{dt} + \nabla P = \mu \Delta \mathbf{u}_f + \rho_f \mathbf{g}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_f = 0, \quad (2)$$

а также уравнения для оседающей частицы [2]

$$m_s = \text{const}. \quad (3)$$

$$m_s \frac{d\mathbf{u}_s}{dt} = \mathbf{F}^{st} + \mathbf{F}^m + \mathbf{F}^a. \quad (4)$$

Здесь  $\rho_f$  и  $\rho_s$  – плотности жидкости (индекс «f») и оседающей частицы (индекс «s») соответственно;  $\mathbf{u}_f$  и  $\mathbf{u}_s$  – векторы скоростей жидкости и оседающей частицы;  $P$  – давление в жидкости;  $\nabla$  – оператор Гамильтона;  $m_s$  – масса оседающей частицы;  $\mathbf{F}^{st}$  – сила Стокса для частицы;  $\mathbf{F}^m$  – сила от присоединенной массы;  $\mathbf{F}^a$  – архимедова сила (суммарная сила от действия тяготения и выталкивания);  $\mu$  – динамическая вязкость жидкости;  $\mathbf{g} = (0, -g)$  – вектор ускорения свободного падения.

Выражения для сил, действующих на оседающую частицу, имеют вид

$$\mathbf{F}^a = m_s \left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_s}\right) \mathbf{g}, \quad (5)$$

$$\mathbf{F}^{st} = 18 \frac{V_s}{d_s^2} \mu (\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_s) = 18 \frac{m_s}{d_s^2 \rho_s} \mu (\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_s), \quad (6)$$

$$\mathbf{F}^m = -\nabla E_f, \quad E_f = \frac{(u_s)^2}{2} \rho_f \int \left(\frac{u_f}{u_s}\right)^2 dV_f. \quad (7)$$

Здесь  $V_s$  – объем частицы;  $d_s$  – диаметр частицы,  $u_s = |\mathbf{u}_s|$ ,  $u_f = |\mathbf{u}_f|$ .

Сила от присоединенной массы  $\mathbf{F}^m$  выражается через кинетическую энергии жидкости  $E_f$ , увлекаемой оседающей частицей при ее ускоренном движении. Поскольку масса является величиной скалярной, фактический знак  $\mathbf{F}^m$  определяется знаком ускорения частицы.

Уравнения (1)-(4) замыкаются начальными (здесь  $\mathbf{x}$  – координаты точки в пространстве)

$$\mathbf{u}_f(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega; \quad (8)$$

$$\mathbf{x}_s(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{x}_{0s}(\mathbf{x}, 0), \quad \mathbf{u}_s(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (9)$$

и граничными условиями

$$\mathbf{u}_f(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_b. \quad (10)$$

$$\frac{d\mathbf{u}_f}{dy}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_t. \quad (11)$$

### 3. Дискретизация задачи методом SPH

Идея метода гидродинамики сглаженных частиц (SPH) основана на представлении расчетного объема конечным набором лагранжевых частиц, каждая из которых обладает объемом, массой и является носителем физических свойств (плотности, скорости, давления и т.д.). Величина некоторого свойства SPH-частицы в точке пространства определяется «сглаженным» вкладом от близлежащих частиц-соседей через весовую функцию – ядро сглаживания  $W$  (далее – ядро). Для численного выражения значения свойства в SPH-частице используются аппроксимации, получаемые из следующих базовых форм [10]:

$$f_i = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} f_j W(r_{ij}, H),$$

$$\nabla f_i = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} f_{ij} \nabla W(r_{ij}, H).$$

Здесь  $f_i = f(x_i^\alpha)$  – значение функции свойства  $f$ , аппроксимируемое в частице  $i$  с координатами  $x_i^\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, D$ ;  $D$  – размерность пространства задачи);  $f_{ij}$  – интерполяция функции  $f$  на отрезке между точками  $x_i^\alpha$  и  $x_j^\alpha$  по двум соответственным значениям  $f_i$  и  $f_j$ ;  $m_j$  и  $\rho_j$  – соответственно масса и плотность частицы, находящейся в области сглаживания;  $W(r_{ij}, H)$  – ядро, удовлетворяющая условиям четности  $W(r_{ij}, H) = W(-r_{ij}, H)$  и компактности  $W(r_{ij}, H) = 0$ ,  $r_{ij} \geq H$ ;  $\nabla W(r_{ij}, H)$  – производная для ядра;  $r_{ij} = \sqrt{\sum_\alpha (x_j^\alpha - x_i^\alpha)^2}$  – расстояние между частицами  $i$  и  $j$ ;  $H$  – размер области сглаживания, определяемый произведением сглаживающей длины  $h$  и безразмерного радиуса сглаживания  $R$ .

Для построения дискретного аналога задачи (1)-(11) методом SPH производится исходное разбиение расчетной области  $\Omega$  на конечное множество SPH-частиц размерами  $d_f$  и  $d_s$ . Дискретный аналог для уравнений (1)-(2) Навье-Стокса формулируется в рамках классического подхода [10, 11] и определяется уравнением движения для каждой из множества SPH-частиц, представляющих расчетный объем жидкости. Далее по тексту такая частица жидкости обозначена индексом « $i$ », и тем же индексом снабжено аппроксимируемое по методу SPH переменное свойство в ней. Уравнение движения жидкости

$$\frac{du_i}{dt} = -m_f \sum_j \left( \frac{P_i + P_j}{\rho_i} + \Pi_{ij} \right) \frac{dW_f(r_{ij})}{dr} \frac{r_{ij}}{|r_{ij}|} + g, \quad (12)$$

где  $j$  – локальный номер любой SPH-частицы внутри области сглаживания;  $\Pi_{ij}$  – член, именуемый искусственной вязкостью [10, 11]

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} -\delta c_0 h \frac{r_{ij} \cdot (u_i - u_j)}{|r_{ij}|^2}, & r_{ij} \cdot (u_i - u_j) < 0, \\ 0, & \text{other.} \end{cases} \quad (13)$$

Согласно [10, 11] искусственная вязкость (13) может заменять собой действие физической вязкости для задач с малыми числами Маха  $M$ . При этом имеет место соотношение  $\delta c_0 h \sim 2(D+2)\mu/\rho_f$ . Для задачи об осаждении частицы  $M \ll 1$ , поскольку движение общего объема жидкости по условию (10) задачи отсутствует. Следовательно, выражение (12) тождественно записи уравнения (1).

Помимо (12) требуется уравнение сохранения массы для жидкой частицы

$$\rho_i = m_f \sum_j W_f(r_{ij}), \quad (14)$$

а также уравнение состояния, связывающее плотность среды и давление в ней [12]

$$P_i = \begin{cases} \rho_{f0} c_0^2 \left( \frac{\rho_i}{\rho_{f0}} - 1 \right), & \rho_i > \rho_{f0}, \\ 0, & \rho_i \leq \rho_{f0}, \end{cases} \quad (15)$$

где  $\rho_{f0}$  – плотность жидкости в естественном состоянии,  $c_0$  – модельная скорость звука,  $m_f$  – масса жидких частиц.

Закон сохранения массы для твердой оседающей частицы (она и ее переменные свойства обозначаются далее индексом « $k$ ») определяется уравнением (3) и имеет вид

$$\rho_k = \sum_j m_j W_s(r_{kj}), \quad (16)$$

дополняемый также уравнением состояния для твердой частицы

$$P_k = \begin{cases} \rho_{s_0} c_0^2 \left( \frac{\rho_k}{\rho_{s_0}} - 1 \right), & \rho_k > \rho_{s_0}, \\ 0, & \rho_k \leq \rho_{s_0}. \end{cases} \quad (17)$$

Дискретный аналог уравнения движения (4) с учетом (5) для оседающей частицы имеет вид

$$\frac{d\mathbf{u}_k}{dt} = \mathbf{A}_k^{st} + \mathbf{A}_k^m + \left( 1 - \frac{\rho_{f_0}}{\rho_{s_0}} \right) \mathbf{g}, \quad (18)$$

Для выражения  $\mathbf{A}_k^{st}$  из (6) используем SPH-аппроксимацию Морриса [13] для вязкой силы, действующей на частицу и учитывающую локальные изменения плотности среды в пределах области сглаживания. Полагая, что коэффициент вязкости жидкости остается неизменным, а сопротивление движению определяется мгновенной плотностью фаз, получим

$$\mathbf{A}_k^{st} = 18 \mu_0 \frac{m_s}{\rho_s} \sum_j \frac{\rho_k + \rho_j}{\rho_k \rho_j} \frac{\mathbf{r}_{kj} \cdot \nabla W_{kj}}{|\mathbf{r}_{kj}|^2} (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_j), \quad \nabla W_{kj} = \frac{dW_s(r_{kj})}{dr} \frac{\mathbf{r}_{kj}}{|\mathbf{r}_{kj}|}, \quad (19)$$

Здесь  $\mu_0$  – модельное значение вязкости среды, которое определяется по формуле

$$\mu_0 = \rho_f \frac{c_0 d_f}{Re_d}, \quad (20)$$

где  $Re_d$  – число Рейнольдса для тела при заданных параметрах задачи.

Аппроксимация для  $\mathbf{A}_k^m$  сформирована исходя из определения выражения кинетической энергии, увлекаемой твердой частицей жидкости. А именно, энергия в объеме жидкости вокруг твердой частицы определяется как сумма энергий в объемах жидких частиц

$$E_k = \frac{1}{2} m_f^2 \sum_j E_j = \frac{1}{2} m_f^2 \sum_j \frac{u_j^2}{\rho_j} W_s(r_{kj}). \quad (21)$$

Градиент энергии выразим в соответствии с базовой аппроксимацией SPH для производной функции

$$\nabla E_k = \frac{m_s}{\rho_s} \sum_j (E_s + E_j) \nabla W_{kj}. \quad (22)$$

Тогда подставив в (16) вместо  $E_j$  выражение (15) и учтя, что энергия твердой частицы есть  $E_s = m_s \frac{u_s^2}{2}$ , в соответствии с (7) получим

$$\mathbf{A}_k^m = -\frac{1}{2\rho_s} \sum_j \left( m_s u_s^2 + m_f^2 \frac{u_j^2}{\rho_j} W_s(r_{kj}) \right) \nabla W_{kj}. \quad (23)$$

Для случая дискретизации расчетного объема частицами разного размера для фаз  $d_f \neq d_s$ , аппроксимации для свойств жидкой фазы (14) и (16) требуют модификации. Здесь необходимо учесть означенное неравенство размеров частиц, находящихся в области сглаживания, для чего вводится коэффициент приведения объема  $o_j = \frac{V_s}{V_j}$ . А именно

$$\rho_i = m_f \sum_j o_j W_f(r_{ij}), \quad (24)$$

$$\nabla P_i = m_f \sum_j \left( \frac{P_i + P_j}{\rho_i} + \Pi \right) o_j \frac{dW_f(r_{ij})}{dr} \frac{\mathbf{r}_{ij}}{|\mathbf{r}_{ij}|}. \quad (25)$$

Важно отметить, что для восстановления мгновенных значений свойств в частицах твердой и жидкой фаз используются разные SPH-ядра. Причем сглаживающая длина  $h$  для каждой

фазы равна соответственному размеру SPH-частицы. При двумерном представлении расчетного объема функции  $W$  имеют следующий вид

- для жидкой фазы (ядро Монагана [11]) с безразмерным радиусом сглаживания  $R = 2$

$$W_f(r_{ij}) = \frac{15}{7\pi d_f^2} \begin{cases} \frac{2}{3} - \left(\frac{r_{ij}}{d_f}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{r_{ij}}{d_f}\right)^3, & 0 \leq \frac{r_{ij}}{d_f} \leq 2, \\ \frac{1}{6}\left(2 - \frac{r_{ij}}{d_f}\right)^3, & 1 \leq \frac{r_{ij}}{d_f} \leq 2, \\ 0, & \frac{r_{ij}}{d_f} > 2; \end{cases}$$

- для твердой фазы (составное ядро [15] с  $R = 1$ ), в котором функции  $W_s(r_{kj})$  и  $\frac{dW_s(r_{kj})}{dr}$  определены независимо друг от друга

$$W_s(r_{kj}) = \frac{15}{13 d_s^2} \begin{cases} \left(1 - \left(\frac{r_{kj}}{d_s}\right)^2\right)^2 \left(1 - \left(4 - \frac{52}{5\pi}\right)\left(\frac{r_{kj}}{d_s}\right)^2\right), & 0 \leq \frac{r_{kj}}{d_s} \leq 1, \\ 0, & \frac{r_{kj}}{d_s} > 1, \end{cases}$$

$$\frac{dW_s(r_{kj})}{dr} = \frac{264}{665 \pi d_s^3} \begin{cases} 22 \frac{r_{kj}}{d_s} - 25, & 0 \leq \frac{r_{kj}}{d_s} \leq 1, \\ 0, & \frac{r_{kj}}{d_s} > 1. \end{cases}$$

Использование для аппроксимации свойств жидкости и твердой частицы разных ядер обусловлено в первую очередь тем, что ядро с  $R = 1$  исключает эффект потери массы даже при отсутствии соседей в области сглаживания. Эта особенность наилучшим образом подходит для моделирования движения гранулированных сред. Кроме того, потеря массы является одной из основных причин получения нефизичных эффектов в численном решении задачи. С другой стороны, ядра с  $R \geq 2$  обеспечивают большую гладкость распределения аппроксимируемых свойств в локальном объеме области сглаживания, поэтому такие ядра лучшим образом подходят для построения моделей движения жидкостей.

#### 4. Алгоритм решения задачи

Для решения задачи (1)–(11) использовался алгоритм Верле, рассмотренный в работах [3, 17]. Дискретизация расчетного объема жидкости осуществляется частицами одинакового диаметра  $d_f$ . При этом соблюдается плотность исходного заполнения: центры жидких частиц равномерно распределены в пространстве так, что расстояние между любой соседней парой составляет  $d_f$ . Осаждаемая частица диаметром  $d_s$ , в начальный момент времени размещалась над свободной поверхностью жидкой фазы на расстоянии  $4d_s$ .

Использование формул (14) и (16), реализующих межфазный обмен массой, требуют пояснений. В процессе движения оседающая частица попадает в области сглаживания окружающих ее жидких частиц. При этом на мгновенное значение плотности в жидкой частице  $\rho_i$  масса твердой частицы не оказывает, а в аппроксимации (14) учитывается только ее объем через значение  $W_f(r_{ik})$ , но не масса.

С другой стороны, при движении оседающей частицы возникает присоединение к ней массы за счет увеличения плотности  $\rho_k$  от воздействия окружающих ее частиц жидкой фазы (налипания). Это реализуется в выражении (16) за счет учета различия масс всех соседей в области сглаживания оседающей частицы.

5. Результаты численного моделирования

Верификация численного решения рассматриваемой задачи в постановке (1)-(11) производилась относительно задачи на определение гидравлической крупности частицы. Средняя скорость установившегося осаждения  $w$  сферической частицы в жидкости [1] в зависимости от ее диаметра есть

$$w = \frac{\mu}{\rho_s d_s} Re_d, \tag{26}$$

где  $Re_d = f(d_b)$  – число Рейнольдса для придонных частиц;  $d_b$  – безразмерное выражение диаметра частицы  $d_b = \frac{\rho_f(\rho_s - \rho_f)g d^3}{\mu^2}$ . В [1] приведена зависимость, позволяющая получить  $Re_d$  на большом диапазоне  $d_b$ . Далее в работе расчетная по (26) гидравлическая крупность обозначена как  $w^{(26)}$ .

Кроме того, известно множество феноменологических формул для песков конкретной местности в малом диапазоне размеров частиц. В частности, рассмотрена формула Руби [18], согласованная с результатами серии экспериментов на осаждение крупниц кварцевого песка плотностью  $2650 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$  в воде при температуре  $16^\circ\text{C}$

$$w^{(27)} = \frac{\mu}{\rho_s d_s} \begin{cases} 6 \left( \sqrt{1 + \frac{d_b}{54}} - 1 \right), & d_b \leq 38500; \\ 1.05 \sqrt{d_b}, & d_b > 38500. \end{cases} \tag{27}$$

Также нами для сравнения использованы справочные данные о гидравлической крупности  $w^{\text{спр}}$  частиц грунта с плотностью  $2650 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$  при температуре  $15^\circ\text{C}$  [19].

В работе произведено численное решение задачи на определение гидравлической крупности для четырех значений диаметра  $d_s$  круглой падающей частицы (табл. 1). Физические параметры и размеры расчетной области следующие:  $\rho_{f0} = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ ;  $\rho_{s0} = 2650 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ ;  $\mu = 0.001 \frac{\text{кг}}{\text{с м}}$ ; толщина слоя жидкости  $H = 0.103 \text{ м}$ ; длина пути свободного падения частицы  $4d_f$ .

Табл. 1. Значения диаметров частиц и соответствующие им значения гидравлической крупности по результатам численного решения.

Table 1. The particle diameters values and corresponding its settling velocity values according by numerical solution results.

	1	2	3	4
$d_s, (\text{м})$	0.00100	0.00065	0.00052	0.00040
$d_b$	25996	7139	3655	1664
$Re_d$	200	90	60	36
$w^{\text{чсл}}, (\text{м/с})$	0.137	0.108	0.094	0.078

Первая серия вычислений производилась при дискретизации обеих фаз частицами одинакового размера,  $d_f = d_s$ . Результаты численного решения такой постановки задачи на нахождение гидравлической крупности  $w^{\text{чсл}}$  представлены в табл. 1 и на рис. 2 – 4. Из графиков рис. 2 и 3 (цифра на графике обозначает порядковый номер значения  $d_s$  в соответствии с табл. 1) видно, что некоторое время твердая частица движется с ускорением, затем происходит удар о жидкость и резкое уменьшение скорости. Затем имеет место переходный период формирования и схлопывания каверны (снова небольшое ускорение) и период плавного гашения импульса от первоначальной скорости вхождения частицы в жидкость. Примерно с отсечки 0.2 с. частица приобретает в среднем постоянную скорость



осаждения  $w^{chl}$ . Результаты показывают (см. табл. 1 и рис. 4), что значения  $w^{chl}$  получаются наиболее близкими к вычисляемым по закону Руби  $w^{(27)}$ .

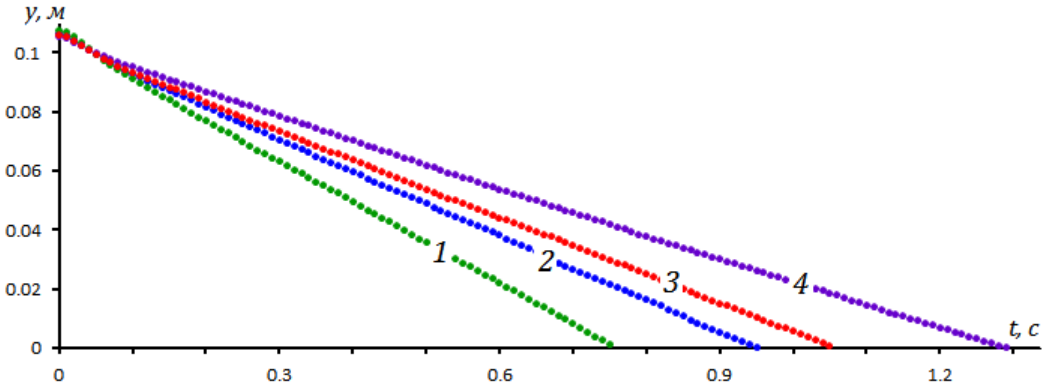


Рис. 2. Изменение вертикальной координаты твердой частицы по времени.  
Fig. 2. The solid particle vertical coordinate changing on time.

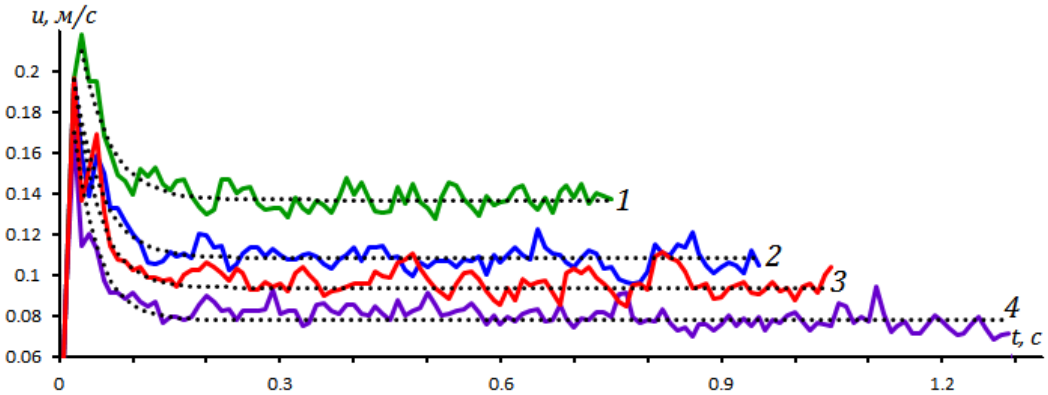


Рис.3. Изменение скорости падения частицы по времени.  
Fig. 3. The solid particle falling speed changing on time.

Нахождение значений  $w^{chl}$  производилось путем анализа полученных временных рядов  $u(t)$  на нахождение отклонения их от среднего – тренда  $T(t)$ . Здесь принято представление его экспоненциальной функцией

$$T(t) = k + (U - k)e^{-at},$$

где  $U$  – скорость падения частицы в жидкость;  $k$  и  $a$  – параметры. При этом параметр  $k$  – определяет значение  $w^{chl}$ ,  $a$  – интенсивность гашения первоначальной скорости  $U$  частицы. Выявленные при анализе рядов расчетных данных параметры трендов представлены в табл. 2. Соответственные графики  $T(t)$  см. на рис. 2 (пунктирные линии).

Влияния значения диаметра частицы на амплитуду флуктуаций значений расчетных рядов  $u(t)$  относительно трендов не прослеживается (рис. 1) – среднеквадратическое отклонение для всех вариантов составляет  $\cong 0.006 \frac{m}{c}$ . Видимое по линиям графиков существенное большее его значение для кривой 3 (см. рис. 2) объясняется случайностью данных ряда  $u(t)$  для каждого запуска вычислений. Иногда получались решения с возникновением небольших горизонтальных «планирований» твердой частицы, в результате которых происходило

перемещение ее в позицию с наименьшим сопротивлением со стороны жидкости и последующий ускоренный «провал». Здесь приведен один такой «негладкий» случай с целью более полного представления общих результатов численного решения поставленной задачи.

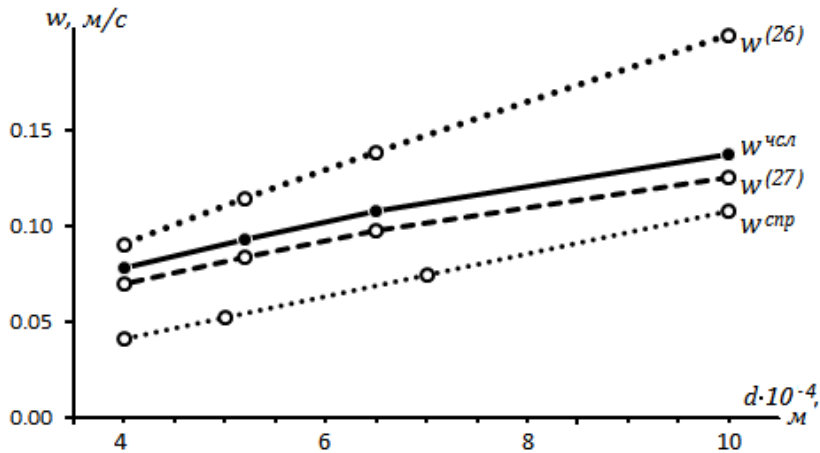


Рис. 4. Зависимости гидравлической крупности частицы от ее диаметра по разным источникам ( $w^{(20)}$ ,  $w^{(21)}$ ,  $w^{спр}$ ) и для численного решения ( $w^{числ}$ ).  
Fig. 4. The dependence of particle settling velocity on its diameter from by different sources ( $w^{(20)}$ ,  $w^{(21)}$ ,  $w^{спр}$ ) and by numerical solution ( $w^{числ}$ ).

Табл. 2. Значения параметров функций  $T(t)$  для исследуемых вариантов диаметров частиц.  
Table 2. The functions  $T(t)$  parameters values for the studied particle diameters variants.

	1	2	3	4
k	0.137	0.108	0.094	0.078
a	0.250	0.270	0.310	0.320

Вторая серия вычисления производилась для случаев различных значений отношений  $\frac{d_s}{d_f} = \theta$ . При этом в первую очередь выявлено, что для получения устойчивого решения должно выполняться условие  $1 \leq \theta < 2$ . В противном случае не возникает адекватных величин сил гидравлического сопротивления. Такая согласованность размеров SPH частиц для жидкой и твердой фаз, а также ограничение снизу на размер жидкой частицы объясняется значениями радиусов сглаживания  $R$  соответственных ядер. Если  $d_f < d_s$  – частица жидкости просто не будет попадать в область сглаживания твердой частицы. Если  $2d_f < d_s$  – уже наоборот ядро сглаживания жидкой фазы слабо отвечает на вхождение твердой частицы в область сглаживания, то есть наблюдается эффект потери массы и не формируется адекватных величин уплотнения и дивергенции относительной скорости.

Влияние на получаемое решение значения  $\theta$  представлено на рис. 5: увеличение этого отношения относительно единицы сопровождается уменьшением  $w^{числ}$ . То есть увеличение размера твердой частицы относительно жидкой приводит к увеличению площади воздействия сил гидравлического сопротивления. Это можно рассматривать как добавление влияния шероховатости поверхности твердой частицы в постановку задачи.

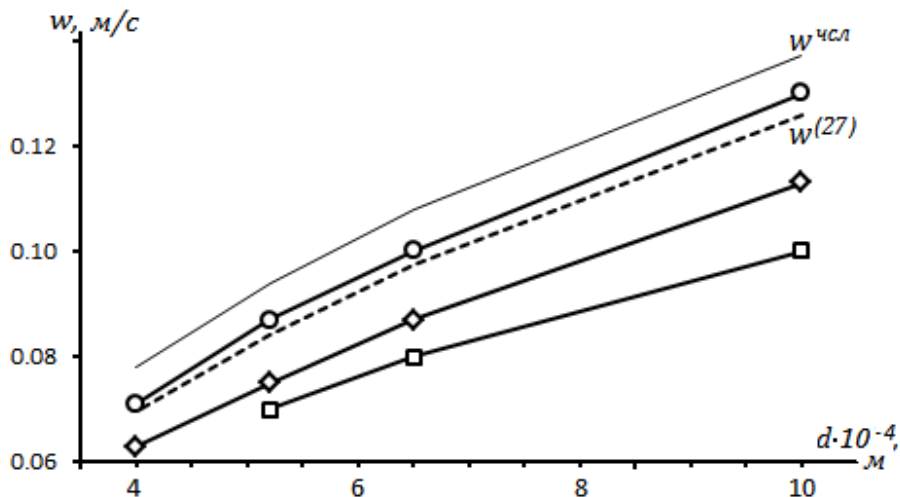


Рис. 5. Влияние отношения  $\theta$  на гидравлическую крупность частицы в численном решении:  $\theta = 1.1$  (линия —○—),  $\theta = 1.3$  (линия —◇—) и  $\theta = 1.6$  (линия —□—).

Fig. 5. The ratio  $\theta$  impact on particle settling velocity in numerical solution:  $\theta = 1.1$  (line —○—),  $\theta = 1.3$  (line —◇—) and  $\theta = 1.6$  (line —□—).

## Список литературы / References

- [1]. Петров А.Г., Потапов И.И. Избранные разделы русловой динамики. – М.: ЛЕНАНД, 2019. – 244 с. / Petrov A.G., Potapov I.I. Selected sections of riverbed dynamics. – Moscow: LENAND, 2019. – 244 P.
- [2]. Караушев А.В. Теория и методы расчета речных наносов. – Л.: Гидрометеиздат, 1977. – 270 с. / Karaushev A. V. Theory and methods of river sediments calculation. Leningrad : Gidrometeoizdat, 1977. – 270 P.
- [3]. Потапов И.И., Решетникова О.В. Применение стационарной гипопластической модели для моделирования движения сыпучей среды // Вычислительные технологии. – 2019. – Т.24, № 6. – С. 90-98. / Potapov I. I., Reshetnikova O. V. The use of a stationary hypoplastic model for modeling the motion of a granular medium // Computing technologies. – 2019. – Vol.24, no 6. – P. 90-98.
- [4]. Coleman S.E., Nikora V.I. Initiation and growth of fluvial dunes // Marine and River Dune Dynamics, 1 – 3 April 2008, Leeds, United Kingdom. – P. 43 – 49.
- [5]. Sanne L.N. Modeling of sand dunes in steady and tidal flow. Ph.D.-thesis MEK-DTU, Technical University of Copenhagen, Denmark. 2003.– 185 P.
- [6]. Tjerry S. Morphological calculations of dunes in alluvial rivers. Ph.D.-thesis ISVA, Technical University of Denmark. 1995. – 193 P.
- [7]. Boac, J.M., Ambrose, R.P.K., Casada, M.E. et al. Applications of Discrete Element Method in Modeling of Grain Postharvest Operations // Food Eng Rev. 2014 – Vol. 6. – P. 128-149.
- [8]. Szwec K., Pozorski J., Minier J.-P. Simulations of single bubbles rising through viscous liquids using Smoothed Particle Hydrodynamics // International Journal of Multiphase Flow. – 2013. – Vol. 50. P. 98-105.
- [9]. Vahabi M., Sadengy K. On the use of SPH method for simulating gas bubbles rising in viscoelastic liquids // Nihon Reorogi Gakkaishi. 2014. – Vol. 42, №. 5. – P. 309-319.
- [10]. Monaghan J.J. Shock Simulation by the Particle Method SPH // Journal of computational physics. – 1983. – Vol. 52. – P. 374-389.
- [11]. Monaghan J.J. Smoothed particle hydrodynamics and its diverse applications // Annu. Rev. Fluid Mech. – 2012. – Vol. 44. – P. 323-346.
- [12]. Molteni D., Colagrossi A. A simple procedure to improve the pressure evaluation in hydrodynamic context using the SPH // Computer Physics Communications. – 2009. Vol. – 180, №. 6. – P. 861-872.
- [13]. Morris J.P., Fox P.J., Zhu Y. Modeling low Reynolds number incompressible flows using SPH // Comput. Phys. – 1997. – Vol. 136. – P. 214-226.

- [14]. Monaghan J.J. Smoothed particles hydrodynamics // *Reports on Progress in Physics*. – 2005. – Vol. 68. – P. 1703-1759.
- [15]. Потапов И. И., Решетникова О. В. Исследование влияния двух геометрических параметров на точность решения гидростатической задачи методом гидродинамики сглаженных частиц // *Компьютерные исследования и моделирование*. – 2021. – Т. 13, № 5. – С. 979-992. / Potapov I. I., Reshetnikova O. V. The two geometric parameters influence study on the hydrostatic problem solution accuracy by the SPH method // *Computer research and modeling*. – 2021. – Vol. 13, no 5. – P. 979-992.
- [16]. Потапов И.И., Решетникова О.В. Реализация модели движения сыпучей среды методом сглаженных частиц // *Информатика и системы управления*. – 2019. – Т. 62, № 4. – С. 26-34. / Potapov I. I., Reshetnikova O. V. About the SPH- implementation of the bulk medium motion model // *Information Science and Control Systems*. – 2019. – Vol. 62, no 4. – P. 26–34.
- [17]. Rubey W. W. Setting velocities of gravel, sand and silt particles // *American journal of science*. 1933. Vol. 25. P. 325-338.
- [18]. Справочник по гидравлике / Под ред. В.А. Большакова. – 2-е изд., перераб. и доп. – К.: Вища шк. Головное изд-во, 1984. – 343 с. / *Handbook of Hydraulics* / Et al. V.A. Bolshakov. – 2nd et. – Kiev: Higher education. Main publishing, 1984. – 343 P.

### ***Информация об авторах / Information about authors***

Игорь Иванович ПОТАПОВ – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Вычислительного центра Дальневосточного отделения Российской Академии наук. Область научных интересов: исследование русловых процессов для равнинных рек с несвязным основанием, речной гидродинамики, донной неустойчивости русла, математическое моделирование эволюции несвязного дна под действием речного потока.

Igor Ivanovich POTAPOV – Dr. Sci. (Phys.-Math.), chief researcher of the Computer center of Far East Branch of the Russian Academy of Sciences. The research interests: channel processes for flat rivers with an incoherent bed, river hydrodynamics, bed instability of the river channel, and mathematical modeling of the incoherent bed evolution under the influence of a river flow.

Ольга Владимировна РЕШЕТНИКОВА – кандидат технических наук, научный сотрудник Вычислительного центра Дальневосточного отделения Российской Академии наук. Область научных интересов: исследование и математическое моделирование механических процессов в сплошных средах.

Olga Vladimirovna RESHETNIKOVA – Cand. Sci. (Tech.), researcher of the Computer center of Far East Branch of the Russian Academy of Sciences. The research interests: analysis and mathematical modeling of mechanical processes in continuous media.