



Исследование электровихревого течения между плоскостями с помощью различных вычислительных подходов

^{1,2} Е.А. Михайлов, ORCID: 0000-0002-9747-4039 <ea.mikhajlov@physics.msu.ru>

^{2,3} А.А. Таранюк, ORCID: 0000-0002-7836-8468 <taranyuk.anton@gmail.com>

² А.П. Степанова, ORCID: 0000-0002-6557-9901 <nastasya_stepanova@mail.ru>

¹ Физический институт имени П.Н. Лебедева РАН,
119991, Россия, г. Москва, Ленинский проспект, д. 53.

² Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
119991, Россия, Москва, Ленинские горы, д. 1.

³ Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН
117997, Россия, Москва, улица Профсоюзная, 84/32.

Аннотация. Электровихревые течения возникают при прохождении электрического тока меняющейся плотности через хорошо проводящую жидкость (например, кислоту или расплав металла). В таком случае ток порождает магнитное поле, которое приводит к возникновению электромагнитной силы, вызывающей закрученные течения среды. Существуют разные методы теоретического исследования подобных течений. Как правило, чтобы избежать необходимости находить зависимость давления от координат, используются переменные «векторный потенциал скорости – завихренность» («скалярная функция тока – завихренность» в случае осесимметричных течений). В таком случае достаточно эффективно использование автомодельных переменных, позволяющих понизить размерность задачи. Это дает возможность искать решение для введенной функции в виде разложения по параметру электровихревого течения, пропорционального квадрату магнитного числа Рейнольдса. Также данное решение может быть получено численно, например с помощью конечно-разностных методов. В настоящее время все чаще решения исследуются методами прямого численного моделирования, когда не делается автомодельных приближений, снижающих точность решения. Тем не менее, в таком случае объем вычислений может оказаться достаточно большим и требует использования суперкомпьютерных ресурсов. Отдельную сложность представляют граничные условия: так, для векторного потенциала скорости получается уравнение четвертого порядка, что накладывает существенные ограничения на шаги по времени в эволюционном уравнении. Проблемы можно избежать, используя приближенные граничные условия, однако это вновь снижает точность решения. В настоящей работе на примере электровихревого течения между плоскостями рассмотрены решения, которые можно получить с использованием различных вычислительных подходов, указанных выше. Проводится сравнение полученных результатов, также они сравниваются с аналитическими приближениями.

Ключевые слова: электровихревые течения; автомодельные переменные; приближенные решения; конечно-разностные методы; скалярная функция тока.

Для цитирования: Михайлов Е.А., Таранюк А.А., Степанова А.П. Исследование электровихревого течения между плоскостями с помощью различных вычислительных подходов. Труды ИСП РАН, том 36, вып. 2, 2024 г., стр. 169–180. DOI: 10.15514/ISPRAS–2024–36(2)–12.

Благодарности: Работа выполнена с использованием оборудования Центра коллективного пользования сверхпроизводительными вычислительными ресурсами МГУ им. М. В. Ломоносова.

Investigation of Electro-Vortex Flow between Planes using Different Computational Approaches

^{1,2} E.A. Mikhailov, ORCID: 0000-0002-9747-4039 <ea.mikhajlov@physics.msu.ru>

^{2,3} A.A. Taranyuk, ORCID: 0000-0002-7836-8468 <taranyuk.anton@gmail.com>

² A.P. Stepanova, ORCID: 0000-0002-6557-9901 <nastasya_stepanova@mail.ru>

¹ P.N. Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences,
53, Leninsky Prospekt, Moscow, 119991, Russia.

² Lomonosov Moscow State University,

1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia.

³ Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics
of the Russian academy of sciences,
84/32, Profsoyuznaya str, Moscow, 117997, Russia.

Abstract. Electro-vortex flows arise when an electric current of varying density passes through a well-conducting fluid (e.g., acid or metal melt). In such a case, the electric current generates a magnetic field, which leads to the Lorentz force causing swirling currents of the medium. There are different methods of theoretical study of such currents. As a rule, to avoid the necessity to find the pressure dependence on coordinates, the variables "vector potential of velocity - swirl" ("scalar current function – swirl" in the case of axisymmetric flows) are used. In such a case, it is quite effective to use automodel variables, which allow to reduce the dimensionality of the problem. In this case, the solution for the introduced function can be sought in the form of an expansion by the electro-vortex flow parameter proportional to the square of the magnetic Reynolds number. Also, this solution can be obtained numerically, for example, using finite-difference methods. Nowadays, more and more often the solutions are investigated by means of direct numerical modeling methods, when no automodel approximations are made, which reduce the accuracy of the solution. Nevertheless, in such a case the number of computations can be quite large and requires the use of supercomputer resources. A separate difficulty is presented by the boundary conditions: for example, for the velocity vector potential we obtain a fourth-order equation, which imposes significant restrictions on the time steps in the evolution equation. The problem can be avoided by using approximate boundary conditions, but this again reduces the accuracy of the solution. In this paper, using the example of electro-vortex flow between planes, the solutions that can be obtained using the various computational approaches mentioned above are examined. The results obtained are compared, and they are also compared with analytical approximations.

Keywords: electro-vortex flows; automodel variables; approximate solutions; finite-difference methods; scalar current function.

For citation: Mikhailov E.A., Taranyuk A.A., Stepanova A.P. Investigation of electro-vortex flow between planes using different computational approaches. *Proceedings of ISP RAS*, vol. 36, issue 2, 2024, pp. 169-180 (in Russian). DOI: 10.15514/ISPRAS-2024-36(2)-12.

Acknowledgements. The work was performed using the equipment of the Center for Collective Use of Ultra-Performance Computing Resources of Lomonosov Moscow State University.

1. Введение

Электровихревые течения представляют большой интерес как с точки зрения теоретической гидродинамики, так и с точки зрения технических приложений. Они возникают при прохождении электрического тока переменной плотности через хорошо проводящие жидкости [1]. К ним относятся растворы кислот и их солей, расплавы различных металлов. В таком случае неоднородный ток порождает магнитное поле. При взаимодействии тока с магнитным полем возникает сила Лоренца, которая приводит к появлению закрученных течений среды.

Существует большое количество технологических процессов, для которых электровихревые течения играют большую роль. Так, в настоящее время активно развиваются методы электродугового переплава металлов. При прохождении электрического тока через расплав в нем возникают закрученные течения [2]. Они могут играть как положительную роль

(способствуя активному перемешиванию среды), так и отрицательную – в плавильных печах могут возникать потоки, которые приводят к их преждевременному износу. Не меньшее значение электровихревые течения играют при создании аккумуляторных батарей. В процессе зарядки в электролите также возникают закрученные движения, которые могут представлять определенную проблему. Ситуация становится особенно сложной в случае быстрой зарядки батареи, которая оказывается необходимой с точки зрения удобства использования устройств. Все это говорит о том, что электровихревые течения требуют детального исследования.

Первые работы, посвященные изучению подобных явлений, относятся к 1970-м годам. Необходимо упомянуть исследования, проводящиеся в латвийском Институте физики (Саласпилс), которые были связаны как с лабораторными экспериментами, так и с теоретическими моделями [3]. В настоящее время значимые результаты накоплены также в Институте механики сплошных сред Уральского отделения РАН (Пермь) [4]. Большое количество прикладных исследований проводится в Магнитогорском государственном техническом университете. Важные эксперименты проводятся на базе Объединенного института высоких температур РАН (Москва) [5]. Если говорить об исследованиях в зарубежных странах, то нельзя не упомянуть значимые теоретические работы, проведенные в Университете Шеффилда (Великобритания) [6] и Университете Леобена (Австрия) [7].

Первые теоретические исследования, связанные с электровихревыми течениями, были связаны с использованием различных упрощенных моделей. Они относились к построению автомодельных решений, которые могли быть найдены с помощью тех или иных приближений. Между тем, по мере развития вычислительной техники стало очевидно, что гораздо более эффективно решать подобные задачи численно [8]. С одной стороны, возможно решать уравнения, полученные в рамках автомодельных приближений, с другой – решать исходную («неупрощенную») задачу с помощью прямого численного моделирования. Как правило, задача решается с использованием переменных «векторный потенциал – завихренность», чтобы избежать необходимости определения поля давления. В случае, если задача характеризуется определенной осевой симметрией, данный подход сводится к использованию переменных «скалярная функция тока – завихренность».

Между тем, подобные методы сталкиваются с некоторыми существенными трудностями. Так, в случае применения прямого численного моделирования требуется использование достаточно подробных сеток. Ситуация усугубляется тем, что, как правило, электровихревые течения характеризуются большими градиентами. Это требует использования суперкомпьютерной техники, что предусматривает подготовку кодов для параллельных вычислений, и затрудняет применение неявных конечно-разностных методов. Поскольку уравнения для векторного потенциала скорости (или скалярной функции тока) имеют четвертый порядок по пространству, это накладывает исключительно жесткие требования на шаг по времени.

Возможным выходом из ситуации является применение приближенных условий, например широко известных в гидродинамике условий Тома [9]. Тем не менее, они являются нелокальными, и порождают дополнительные сложности для решения. Кроме того, данные условия – приближенные, поэтому в данном случае мы получаем дополнительный источник возможных ошибок. Все это требует детального анализа результатов, полученных разными способами, и их сравнения.

В настоящей работе рассмотрен достаточно интересный и важный с точки зрения технических приложений пример электровихревого течения между двумя плоскостями [10-11]. Электрический ток растекается от двух плоских электродов положительной полярности к удаленному электроду отрицательной полярности, который охватывает область на довольно большом расстоянии (рис. 1). Ранее для данной задачи было получено уравнение в автомодельных переменных, предполагающий бесконечным расстоянием до электрода отрицательной полярности [12-13]. Его решение можно получить с помощью итерационного

метода ван Дайка, раскладывая скалярную функцию тока по степеням параметра электровихревого течения. (Его величина по порядку величины равна квадрату магнитного числа Рейнольдса). В предшествующих работах мы получили приближения вплоть до третьего порядка включительно.

В настоящей работе мы решаем задачу об электровихревом течении между плоскостями (рис.1), используя различные вычислительные модели. Сначала мы решаем задачу численно в автоматической постановке, пользуясь как точными граничными условиями (тогда возникает необходимость решения уравнения четвертого порядка для скалярной функции тока), так и приближенными, когда исследование сводится к необходимости решения пары уравнений второго порядка – для скалярной функции тока и для завихренности течения. Наконец, решается исходная физическая задача. Результаты решения, полученные разными методами, сравниваются как друг с другом, так и с приближенной асимптотической моделью, результаты использования которой для данного течения также приводятся в статье.

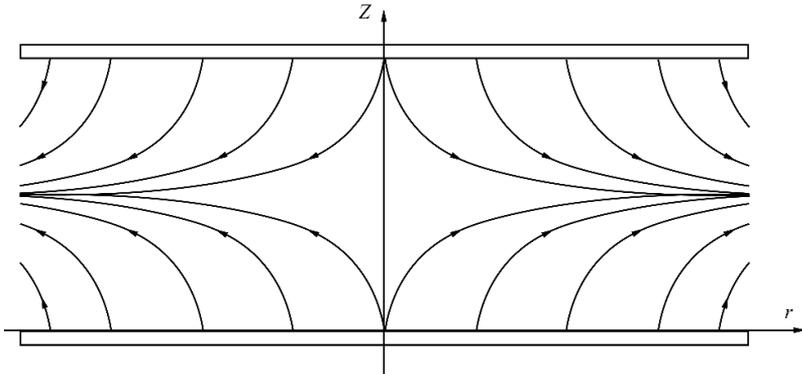


Рис. 1. Схематичное изображение линий электрического тока
 Fig. 1. Schematic representation of electric current lines

2. Основные уравнения

Рассмотрим течение между двумя плоскостями. Его скорость \vec{v} описывается с помощью уравнения Навье-Стокса:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} [\vec{j} \times \vec{B}] + \nu \Delta \vec{v};$$

$$\vec{v}|_{\Gamma} = 0$$
(1)

где p – давление, ρ – плотность среды, \vec{j} – плотность электрического тока, \vec{B} – индукция магнитного поля, ν – кинематическая вязкость среды.

Одной из сложностей при решении подобных уравнений является необходимость вычислять поле давления. С учетом того, что жидкость с большой степенью точности можно считать несжимаемой, поле скорости удовлетворяет условию $\nabla \cdot \vec{v} = 0$. По этой причине скорость можно представить в виде $\vec{v} = \nabla \times \vec{\psi}$, где $\vec{\psi}$ – так называемый векторный потенциал скорости (он имеет примерно тот же смысл, что и векторный потенциал для магнитного поля, которое также является соленоидальным). Другой важной характеристикой течения является так называемая завихренность, определяемая как ротор скорости течения $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}$.

Учитывая осевую симметрию задачи, можно отметить, что в отсутствие внешних магнитных полей движение среды будет полоидальным ($\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_z \vec{e}_z$), поэтому векторный потенциал скорости будет иметь лишь одну ненулевую компоненту и может быть представлен с

помощью так называемой скалярной функции тока: $\vec{\psi} = \psi \vec{e}_\varphi$. То же самое можно сказать и про завихренность, которая в данном случае также будет описываться с помощью скалярной функции: $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_\varphi$.

Уравнение для ее эволюции может быть получено путем взятия операции ротора от обеих частей уравнения Навье-Стокса:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial z} = \left(\vec{\nabla} \times [\vec{j} \times \vec{B}] \right)_\varphi + \nu \left(\Delta \omega - \frac{\omega}{r^2} \right). \quad (2)$$

Нас будет интересовать стационарное решение, не зависящее от времени. Кроме того, данное уравнение удобно переписать в безразмерном виде. Будем измерять длины в единицах расстояния между пластинами. Также введем параметр электровихревого течения $S = \frac{\mu_0 I^2}{\rho \nu^2}$

Тогда первое из уравнений можно записать в виде [12]:

$$-\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial z} = S r^2 \left(z - \frac{1}{2} \right) + \Delta \omega - \frac{\omega}{r^2}. \quad (3)$$

Кроме того, необходимо решать уравнение, позволяющее связать завихренность и скалярную функцию тока:

$$\Delta \psi - \frac{\psi}{r^2} = -\omega. \quad (4)$$

В качестве граничных условий в случае прилипания к поверхности следует выбрать следующее:

$$\psi|_{z=0} = \psi|_{z=1} = \psi|_{r=R} = \frac{\partial \psi}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial \psi}{\partial z} \Big|_{z=1} = \frac{\partial \psi}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0. \quad (5)$$

Данную систему уравнений можно решать различными способами, как аналитическими, так и численными.

3. Автомодельная постановка задачи

Как для аналитических, так и для численных расчетов удобно пользоваться автомодельным приближением [13]. Если полагать, что $R \rightarrow \infty$, то можно ввести вспомогательную функцию $F(z)$, посредством которой скалярная функция тока будет выражаться с помощью выражения [12]:

$$\psi(r, z) = r^2 F(z). \quad (6)$$

Тогда для нее можно сформулировать уравнение:

$$F \frac{d^3 F}{dz^3} = \frac{d^4 F}{dz^4} + S \left(z - \frac{1}{2} \right) \quad (7)$$

с граничными условиями:

$$F|_{z=0} = F|_{z=1} = \frac{dF}{dz} \Big|_{z=0} = \frac{dF}{dz} \Big|_{z=1} = 0. \quad (8)$$

3.1 Асимптотическое разложение решения

Для решения поставленной задачи мы разложим функцию F по степеням параметра электровихревого течения S . Разложение тогда будет выглядеть следующим образом [12]:

$$F(z) = S^1 F_1(z) + \dots + S^n F_n(z) + \dots \quad (9)$$

В зависимости от требований к точности решения мы можем далее решать задачу с разным количеством слагаемых в представленном выше разложении. Для поиска решений будем пользоваться методом последовательных приближений: сначала найдём функцию F_1 , учитывая в разложении только слагаемые, пропорциональные параметру электровихревых течений в первой степени, а затем будем вычислять каждую последующую через предыдущие. Для дальнейшего нахождения каждого из приближений подставим общее разложение в полученное выше стационарное уравнение:

$$S \frac{d^4 F_1}{dz^4} + S^2 \frac{d^4 F_2}{dz^4} - (SF_1(z) + S^2 F_2(z)) \cdot \left(S \frac{d^3 F_1}{dz^3} + S^2 \frac{d^3 F_2}{dz^3} \right) + S \left(z - \frac{1}{2} \right) = 0 \quad (10)$$

Итак, найдём первое приближение по описанному нами алгоритму:

$$\frac{d^4 F_1}{dz^4} + z - \frac{1}{2} = 0 \quad (11)$$

Граничные условия для данного уравнения нам уже знакомы:

$$F_1|_{z=0} = F_1|_{z=1} = F_1'|_{z=0} = F_1'|_{z=1} = 0 \quad (12)$$

Теперь мы решаем полученное уравнение четырёхкратным интегрированием с поиском констант интегрирования из поставленных граничных условий. Тогда получим:

$$F_1(z) = -\frac{1}{120} \left(z^5 - \frac{5}{2} z^4 + 2z^3 - \frac{1}{2} z^2 \right) \quad (13)$$

Полученное первое приближение применимо для значений параметра электровихревого течения $S < 10^2$. В связи с этим возникает необходимость найти второе приближение. Продолжая аналогично данные действия, мы можем получить уравнение для второго приближения, которое выглядит следующим образом (граничные условия будут аналогичны):

$$\frac{d^4 F_2}{dz^4} = F_1 \frac{d^3 F_1}{dz^3} \quad (14)$$

Его решение будет таким [12]:

$$F_2(z) = \frac{1}{199584000} z^2 (z-1)^2 \left(z - \frac{1}{2} \right) (105z^6 - 315z^5 + 295z^4 - 65z^3 - 19z^2 - z + 3) \quad (15)$$

Мы нашли первые два приближения решения поставленной задачи. Но трудность состоит в том, что для больших значений параметра электровихревого течения S этого вновь оказывается недостаточно. Поэтому возникает необходимость поиска третьего приближения. Для нахождения соответствующей функции получим уравнение:

$$\frac{d^4 F_3}{dz^4} = (F_1(z) \frac{d^3}{dz^3} F_2(z) + F_2(z) \frac{d^3}{dz^3} F_1(z)) \quad (16)$$

Пошагово интегрируя обе части этого уравнения четыре раза и находя константы интегрирования с помощью описанных выше граничных условий, получим [13]:

$$F_3(z) = \frac{-4299750}{53353114214400000} z^2 (z-1)^2 \left(z - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{2124643}{143325} z^{10} + \frac{1898801}{143325} z^8 + \frac{141433}{716625} z^6 + \frac{169082}{2149875} z^4 + \frac{46556}{716625} z^5 + \right. \\ \left. + z^{12} - 6z^{11} - \frac{128}{716625} - \frac{3116}{2149875} z - \frac{10544}{2149875} z^2 - \frac{27364}{2149875} z^3 - \frac{612614}{143325} z^7 - \frac{548068}{28665} z^9 \right) \quad (17)$$

Таким образом, мы получили третье приближение, которое дает вполне приемлемую точность при $S < 10^5$. Такой параметр электровихревых течений соответствует уже довольно высоким токам и в связи с этим удовлетворяет требованиям многих экспериментов.

Полученные аналитически результаты являются хорошим материалом для сравнения с численным решением автоматической задачи. Также можно предполагать качественное соответствие с более полной задачей, где не используются автоматические подходы.

3.2 Численное решение автомодельной задачи

Как можно видеть из сказанного выше, решение задачи о возникновении электровихревого течения с помощью асимптотических разложений оказывается хотя и вполне разрешимой задачей, но полученные решения оказываются крайне громоздкими, а вычисление конкретных значений скалярной функции тока по данным формулам само по себе требует значительных вычислительных ресурсов.

По причинам, обозначенным выше, гораздо более применимыми выглядят численные подходы, связанные с решением возникающих уравнений конечно-разностными методами. Для этого можно использовать метод счета на установление, который, по сути, будет являться возвратом к исходной нестационарной задаче [15,16]. Тем не менее, нельзя не отметить следующую сложность. Так, уравнение для скалярной функции тока (а также для функции F) имеют четвертый порядок по координате, и его решение сопряжено с определенными проблемами. В случае использования явных схем (а в случае неявных, кроме определенной сложности в реализации, оказывается затруднено их распараллеливание) шаг по времени оказывается пропорционален четвертой степени шага по координате. Это требует огромных вычислительных ресурсов. По этой причине можно воспользоваться вспомогательной функцией, смысл которой перекликается с завихренностью [13]:

$$W = -\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}. \quad (18)$$

Обсудим, как можно поставить граничные условия. В окрестностях границы (например, $z = 0$) значение функции может быть выражено так:

$$F|_{z=\Delta z} \cong F|_{z=0} + \frac{\partial F}{\partial z}\bigg|_{z=0} \Delta z + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\bigg|_{z=0} \Delta z^2 = -\frac{1}{2} W|_{z=0} \Delta z^2. \quad (19)$$

Тогда мы можем поставить так называемое нелокальное граничное условие Тома [6, 17] (в качестве Δz можно использовать шаг разностной схемы):

$$F|_{z=\Delta z} = -\frac{1}{2} W|_{z=0} \Delta z^2. \quad (20)$$

Как и говорилось выше, задача может быть решена с помощью метода счета на установление. Тогда мы приходим к системе следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = F \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - S \left(z - \frac{1}{2} \right); \quad (21)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = W + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}. \quad (22)$$

$$F|_{z=0} = F|_{z=1} = F|_{z=\Delta z} + \frac{1}{2} W|_{z=0} \Delta z^2 = F|_{z=1-\Delta z} + \frac{1}{2} W|_{z=1} \Delta z^2 = 0. \quad (23)$$

Подобная задача решалась нами с помощью собственной компьютерной программы, представленной в одном из репозиторий для свободного использования [19]. Отметим, что алгоритм основан на использовании явной численной схемы с применением метода счёта на установление. Это обеспечивает достаточную точность и позволяет решать задачу довольно быстро даже на отдельном процессоре (учитывая ее простоту). В таком случае количество операций имеет порядок $O(N \cdot M)$, где N – количество узлов сетки по оси Z , M – количество узлов по оси времени. Учитывая условия устойчивости разностной схемы, $M = O(N^2)$, поэтому в качестве оценки для числа операций мы получаем величину $O(N^3)$. В табл. 1 приведены данные о времени, затраченном на расчет при использовании персонального компьютера с процессором Intel Core i5-5250U (столбец $N = 100$).

Между тем, возникает вопрос о том, насколько численное решение, полученное таким способом, соответствует задаче. Для этого с помощью метода счета на установление нами решалась исходная автомодельная задача (7) – (8) для функции F . Как говорилось выше, объем вычислений оказывается довольно значительным, поэтому это потребовало использования параллельных вычислений на суперкомпьютере [18]. Код для вычислений также представлен в репозитории для свободного использования [19]. Для данной задачи также использовалась явная численная схема, количество операций для которой имеет порядок $O(N \cdot M)$, где N – количество узлов сетки по оси Z , M – количество узлов по оси времени. Здесь условие устойчивости приводит к соотношению $M=O(N^4)$, поэтому для общего числа операций имеем величину $O(N^5)$. Хотя это и довольно большое значение, недостатки данной схемы отчасти компенсируются весьма несложным алгоритмом распараллеливания. В табл. 1 приведены данные о времени, затраченном на расчет при использовании суперкомпьютера «Ломоносов-2» (столбец $N = 1000$).

Табл. 1. Время счёта
Table 1. Counting time

Задача	N=100	N=1000
Автомодельная задача с использованием условий Тома	37 с (на одном ядре)	163 с (на одном ядре)
Автомодельная задача 4-ого порядка	7148 с (на 25 ядрах)	73851 с (на 250 ядрах)
Двумерная задача	8795 с (на 25 ядрах)	93186 с (на 250 ядрах)

Результат сравнения результатов, полученных с помощью различных вычислительных подходов, показан на рис. 2. Также там показано асимптотическое решение, полученное аналитически. Можно видеть, что все способы получения решения демонстрируют сходство. Если говорить о двух численных подходах (черная и красная кривые), то они практически неразличимы даже для использованных в расчете грубых сетках. Ввиду того, что вычислительная сложность алгоритма, использующего приближенные условия Тома, на два порядка меньше, это означает, что в приложениях есть смысл использовать именно его. Что касается аналитического выражения, то оно дает гораздо большую ошибку и должно использоваться лишь для грубых оценок.

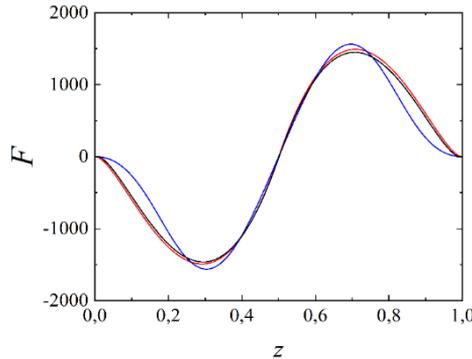


Рис. 2. Зависимость $F(z)$, полученная различными подходами: черная линия – решение дифференциального уравнения 4-ого порядка, красная – с использованием граничных условий Тома, синяя – аналитическое приближение
Fig. 2. The dependence $F(z)$ obtained by various approaches: the black line is the solution of a differential equation of the 4th order, the red one is using the boundary conditions of the Volume, the blue one is an analytical approximation

4. Решение двумерной задачи

Вместе с тем, кроме решения автомодельных задач, оказывается достаточно интересным численное решение исходной двумерной задачи для нахождения скалярной функции тока. Тогда в стационарном случае необходимо решить следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \omega}{\partial r} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{\omega}{r^2} + Sr^2 \left(\frac{1}{2} - z \right); \quad (24)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r^2} + \omega = 0. \quad (25)$$

Данную задачу мы решали численно с помощью счета на установление, поставив такую задачу:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{\omega}{r^2} + Sr^2 \left(\frac{1}{2} - z \right); \quad (26)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r^2} + \omega; \quad (27)$$

$$\psi|_{z=0} = \psi|_{z=1} = \psi|_{r=R} = \frac{\partial \psi}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0; \quad (28)$$

$$\psi|_{z=\Delta z} + \frac{1}{2} \omega|_{z=0} \Delta z^2 = \psi|_{z=1-\Delta z} + \frac{1}{2} \omega|_{z=1} \Delta z^2 = \psi|_{r=R-\Delta r} + \frac{1}{2} \omega|_{r=R} \Delta r^2 = 0. \quad (29)$$

Для решения задачи была составлена программа, доступная в репозитории для свободного использования. Аналогично предыдущим алгоритмам, данный также использует явную численную схему, число операций для которой имеет порядок $O(N^2 \cdot M)$, где N – количество узлов сетки по координатным осям R и Z , M – количество узлов по оси времени. Отметим, что условие устойчивости позволяет записать соотношение $M=O(N^2)$. Тогда количество операций будет порядка $O(N^4)$. С учетом использования параллельных вычислений, данная задача считается в течение удовлетворительного времени. В табл. 1 приведены данные о времени, затраченном на расчет при использовании суперкомпьютера «Ломоносов-2». Результаты при $R=10$ представлены на рис. 3. Было бы интересно сравнить ее с результатами автомодельной задачи. Нельзя не отметить, что полной аналогии между ними быть не может (поскольку одна из задач ставится в бесконечной области, а другая – в ограниченной. Тем не менее, во внутренних областях на большом расстоянии от внешней границы подобное сравнение вполне допустимо, и можно ожидать, что разные подходы будут давать качественно схожие результаты. Действительно, рис. 4 показывает, что около оси z скалярные функции тока близки друг к другу, но при удалении от нее различие начинает нарастать. Экстремумы функции тока в полной задаче смещаются к верхнему и нижнему электроду.

5. Заключение

В представленной работе мы рассмотрели электровихревое течение между двумя плоскостями. Для него было построено автомодельное решение с применением условий Тома, с использованием исходных граничных условий, а также с приближенным аналитическим решением. Было показано, что условия Тома дают вполне приемлемую точность, позволяя существенно сэкономить вычислительные ресурсы. Это означает, что в реальных прикладных задачах имеет смысл использовать данную приближенную постановку, которая практически не уступает по аккуратности даваемых результатов, однако является намного более экономной в плане вычислительных затрат.

Также автомодельное решение сравнивалось с данными прямого численного решения задачи для скалярной функции тока. Можно отметить, что на небольшом расстоянии от центра оно дает приемлемые результаты, однако по мере удаления различие начинает возрастать.

В данных задачах особое значение имеет производительность вычислений и затраченное на них время. Сравнение затраченного времени для разных задач и вычислительных инструментов приведено в табл.1. Можно видеть, что время расчета для выбранных параметров остается вполне приемлемым, хотя для дальнейшего развития задачи имело бы смысл модифицировать численные схемы, в частности – использовать схемы переменных направлений.

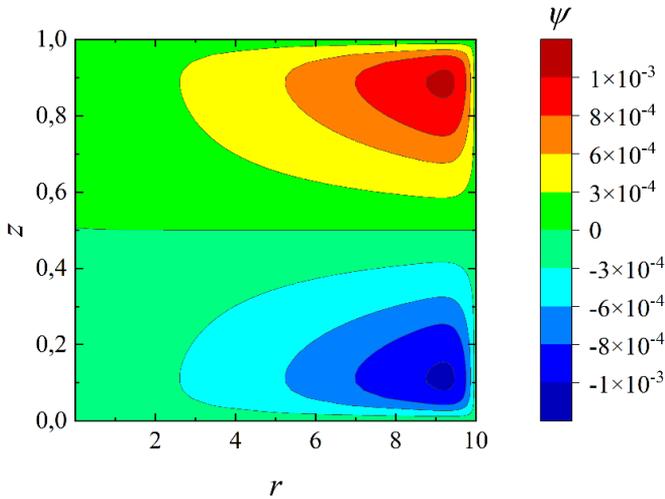


Рис. 3. Линии уровня функции $\psi(r, s)$ для неавтомодельного решения
Fig. 3. Lines of the function $\psi(r, s)$ level for a non-automatic solution

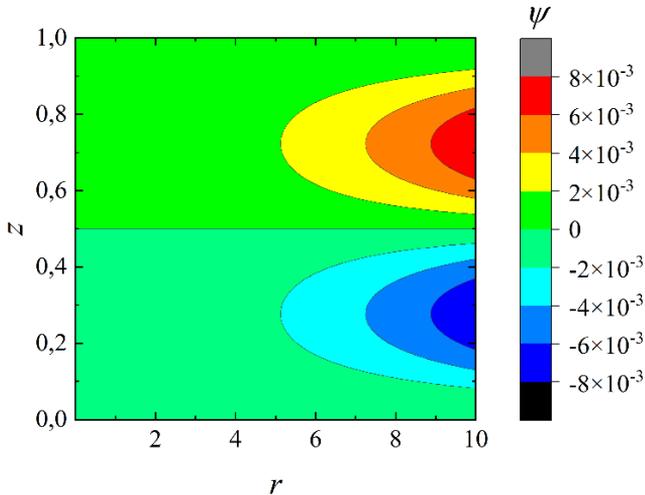


Рис. 4. Линии уровня функции $\psi(r, s)$ для автомодельного решения
Fig. 4. Lines of the $\psi(r, s)$ function level for a self-similar solution

Список литературы / References

- [1]. Гельфгат Ю.М., Лнелаусис О.А., Щербинин Э.В. Жидкий металл под действием электромагнитных сил. – Рига: Зинатне, 1975
- [2]. Pavlovs S., Jakovics A., Baake E., Nacke B. Melt flow patterns in metallurgical MHD devices with combined inductive and conductive power supply, *Magneto hydrodynamics*, 50 (2014), 303–315
- [3]. Бояревич В.В., Фрейберг Я.Ж., Шилова Е.И., Щербинин Э.В. Электровихревые течения. \ Рига: Зинатне, 1985.
- [4]. Мандрыкин, С.Д., Колесниченко, И.В., Лосев, Г.Л., Фрик, П.Г. Электровихревое течение жидкого металла в цилиндрическом канале / С.Д. Мандрыкин, И.В. Колесниченко, Г.Л. Лосев, П.Г. Фрик. // Вестник Пермского университета. Физика. – Вып.2 (40). – С.20 – 26.
- [5]. Ивочкин, Ю.П., Тепляков, И.О., Гусева, А.А., Токарев, Ю.Н. Численное и экспериментальное исследование структуры закрученного электровихревого течения / Ю.П. Ивочкин, И.О. Тепляков, А.А. Гусева, Ю.Н. Токарев // Тепловые процессы в технике, 2012. – 8. – С.345 – 352.
- [6]. Sozou, C., Pickering, W.M. Magneto hydrodynamic flow in a container due to the discharge of an electric current in a hemispherical container / C.Sozou, W.M.Pickering // *Journal of Fluid Mechanics*, 1976. – V.73. – P.641 – 650
- [7]. Kharicha, A., Karimi-Sibaki, E., Wu, M., Ludwig, A. Bohacek Review on Modeling and Simulation of Electroslag Remelting / A.Kharicha, E.Karimi-Sibaki, M.Wu, A.Ludwig, J.: *Steel Res. Int.*, 2018. – V.89 - 1700100.
- [8]. Liu, K. Numerical and experimental investigation of electro-vortex flow in a cylindrical container / K. Liu, F. Stefani, N. Weber, T. Weier, B.W. Li // *Magneto hydrodynamics*. 2020. Vol. 56. No. 1.
- [9]. Weinan, E., Liu, J.G. Vorticity Boundary Condition and Related Issues for Finite Difference Schemes / E. Weinan, J.G. Liu // *Journal of Computational Physics*, 1996. – V.124.
- [10]. Kaudze M., Chudnovsky A. Axisymmetric electrovortex flow between two planes induced by AC, *Magneto hydrodynamics*, 25 (1989), 187–194 Zentralblatt MATH.
- [11]. Bojarevich V., Saramkin V. MHD flows due to electrical current discharge in an axisymmetric layer of limited depth, *Magneto hydrodynamics*, 13 (1977), 172–177.
- [12]. Михайлов, Е.А., Чудновский, А.Ю. Асимптотическое разложение решения уравнения для медленного осесимметричного электровихревого течения между двумя плоскостями / Михайлов Е.А., Чудновский А.Ю. // *Сибирский журнал индустриальной математики*, 2020. – Т.23. – С.88 – 100.
- [13]. Михайлов Е.А., Степанова А.П., Таранюк А.А. Анализ и модель системы электровихревых течений между двумя плоскостями при больших токах // *Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева*, 2022, 1. С.32-42.
- [14]. Смирнов Е.М. Автомодельные решения уравнений Навье-Стокса для закрученного течения несжимаемой жидкости в круглой трубе // *Прикладная математика и механика*, 1981, 45, с.833 – 839
- [15]. Калиткин Н.Н. Численные методы. М., Наука, 1978.
- [16]. Калиткин Н.Н., Белов А.А. Аналог метода Рундсона для логарифмически сходящегося счета на установление // *Доклады Академии наук*, 2013, 452, с.261 – 265.
- [17]. Mikhailov E.A., Teplyakov I.O. Construction asymptotic solution while studying electrovortex flow in hemispherical container usung Stokes approximation // *Journal of Physics: Conference Series*, 2017, 891, 012060.
- [18]. Vi. Voevodin, A. Antonov, D. Nikitenko, P. Shvets, S. Sobolev, I. Sidorov, K. Stefanov, Vad. Voevodin, S. Zhumatiy: Supercomputer Lomonosov-2: Large Scale, Deep Monitoring and Fine Analytics for the User Community. In *Journal: Supercomputing Frontiers and Innovations*, Vol.6, No.2 (2019). pp.4–11. DOI:10.14529/jsfi190201
- [19]. https://github.com/Azilrib/EVT_Planes.

Информация об авторах / Information about authors

Евгений Александрович МИХАЙЛОВ – доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник Физического института имени П.Н. Лебедева с 2021 года, доцент физического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова с 2022 года. Сфера научных интересов: магнитная гидродинамика, космические магнитные поля, электровихревые течения, математическое моделирование в физике.

Evgeny Alexandrovich MIKHAILOV – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Senior Researcher of Lebedev Physical Institute since 2021, Associate Professor of Lomonosov Moscow State University since 2022. Research interests: magnetohydrodynamics, cosmic magnetic fields, electrovortex flows, mathematical modelling in physics.

Антон Александрович ТАРАНЮК – студент физического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова, лаборант-исследователь ИТПЗ РАН. Сфера научных интересов: магнитная гидродинамика, электровихревые течения, математическое моделирование в физике.

Anton Alexandrovich TARANYUK – student of Lomonosov Moscow State University, laboratory assistant researcher at ИЕПТ RAS. Research interests: magnetohydrodynamics, electrovortex flows, mathematical modelling in physics.

Анастасия Павловна СТЕПАНОВА – студент физического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова. Сфера научных интересов: магнитная гидродинамика, электровихревые течения, математическое моделирование в физике.

Anastasia Pavlovna STEPANOVA – student of Lomonosov Moscow State University. Research interests: magnetohydrodynamics, electrovortex flows, mathematical modelling in physics.