

DOI: 10.15514/ISPRAS-2024-36(4)-7



О времени реализации распределенных вычислений в синхронном режиме при ограниченном числе копий программного ресурса

П.А. Павлов, ORCID: 0009-0008-1233-7387 <pavlov.p@polessu.by>

*Полесский государственный университет,
Республика Беларусь, 225710, г. Пинск, ул. Днепровской флотилии, д. 23.*

Аннотация. В статье: построена математическая модель распределенных вычислений при ограниченном числе копий структурированного программного ресурса; в случаях неограниченного и ограниченного параллелизма по числу процессоров многопроцессорной распределенной вычислительной системы решены задачи нахождения минимального времени выполнения неоднородных, однородных и одинаково распределенных конкурирующих процессов в синхронном режиме, обеспечивающем непрерывное выполнение каждого блока программного ресурса всеми процессами.

Ключевые слова: программный ресурс; синхронный режим; неограниченный (ограниченный) параллелизм; структурирование; конвейеризация; диаграмма Ганта; функционал Беллмана-Джонсона.

Для цитирования: Павлов П.А. О времени реализации распределенных вычислений в синхронном режиме при ограниченном числе копий программного ресурса. Труды ИСП РАН, том 36, вып. 4, 2024 г., стр. 81–98. DOI: 10.15514/ISPRAS-2024-36(4)-7.

On the Implementation Time of Distributed Computing in Synchronous Mode with a Limited Number of Copies of a Software Resource

P.A. Pavlov ORCID: 0009-0008-1233-7387 <pavlov.p@polessu.by>

*Polessky state university,
23, Dneprovskoy flotilii st., Pinsk, 225710, Belarus.*

Abstract. The article constructs a mathematical model of distributed computing with a limited number of copies of a structured software resource; in cases of unlimited and limited parallelism by the number of processors of a multiprocessor distributed computing system, the problems of finding the minimum execution time of heterogeneous, homogeneous and identically distributed competing processes in a synchronous mode, ensuring the continuous execution of each block of software resource by all processes.

Keywords: software resource; synchronous mode; unlimited (limited) parallelism; structuring; conveyorization; Gantt chart; Bellman-Johnson functional.

For citation: Pavlov P.A. On the implementation time of distributed computing in synchronous mode with a limited number of copies of a software resource. *Trudy ISP RAN/Proc. ISP RAS*, vol. 36, issue 4, 2024. pp. 81–98 (in Russian). DOI: 10.15514/ISPRAS-2024-36(4)-7.

1. Введение

Повышение производительности вычислительных систем всегда было и остается актуальной проблемой. Но никакая вычислительная система по своей мощности не может сравниться с теми суммарными ресурсами, которые сосредоточены в локальных и глобальных компьютерных сетях. Быстрое развитие информационно-коммуникационных и сетевых технологий привело к интенсивному использованию географически распределенных вычислительных ресурсов и созданию на их основе динамически-масштабируемых высокопроизводительных *распределенных вычислительных систем* (РВС). В литературе отсутствует каноническое определение того, что такое “*распределенная вычислительная система*”. Например, профессор Эндрю Стюарт Таненбаум определяет распределенную систему как “набор независимых компьютеров, представляющиеся их пользователям единой объединенной системой” [1]. В книге [2] сказано, что “под распределенной системой мы понимаем всякую вычислительную систему, в которой несколько компьютеров или процессоров, так или иначе, вступают во взаимодействие”. Можно также считать, что распределенная система – это система, компоненты которой расположены на разных сетевых компьютерах, которые обмениваются данными и координируют свои действия путем передачи сообщений друг другу [3].

На сегодняшний день существуют различные типы распределенных вычислительных систем – это вычислительные кластеры, симметричные мультипроцессоры (SMP), системы с распределенной разделяемой памятью (DSM), массово-параллельные системы (MPP), мультикомпьютеры, системы облачных, параллельных и грид-вычислений [4]. Из вышесказанного следует, что *распределенные вычислительные системы – это сложные сетевые системы (системы систем), предназначенные для обработки больших объемов данных, одним из основных преимуществ которых является возможность параллельной обработки процессов* [5].

В настоящее время в области распределенных вычислений ведутся интенсивные исследования. Но до сих пор открытыми остаются проблемы оптимальной организации параллельных процессов *в условиях ограниченных ресурсов*. Это порождает сложные в математическом отношении задачи эффективной (оптимальной) реализации заданных объемов вычислений в различных режимах асинхронного и синхронного взаимодействия процессов при неограниченном и ограниченном параллелизме, задачи синхронизации множества параллельных конкурирующих процессов, задачи определения критериев эффективности и оптимальности заданных объемов вычислений, задачи эффективного отображения алгоритмов и соответствующих программных реализаций с учетом особенностей многопроцессорных систем (МС) и вычислительных комплексов (ВК) и др. Данные задачи имеют как прямой, так и обратный характер. При постановке прямых задач условиями являются значения параметров распределенной вычислительной системы, а решением минимальное общее время реализации заданных объемов вычислений. Постановка обратных задач сводится к поиску критериев эффективности и оптимальности организации выполнения множества распределенных процессов. В виду дискретного и комбинаторного характера вышеуказанных задач определенный прогресс на пути их решения может быть достигнут за счет применения математического аппарата и методов дискретных систем и дискретной оптимизации, теории расписаний и сетевых графов, теории алгоритмов и множеств, алгебры матриц и др. [6-8].

Случай, когда в общей памяти РВС размещена одна копия программного ресурса (ПР), с различных точек зрения был изучен в работах [9-15] и др. Но, к сожалению, мало работ по математическому моделированию функционирования распределенных вычислительных систем, в которых в общей памяти одновременно может находиться не одна, а несколько копий программного ресурса [16-19]. Такое обобщение носит принципиальный характер в

виду того, что отражает основные черты мультиконвейерной обработки, а также позволяет сравнить эффективность конвейерной и параллельной обработки.

Исследования в указанном направлении являются чрезвычайно актуальными. Особая активность характерна для Института системного программирования Российской Академии наук, факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, Объединенного института проблем информатики Национальной Академии наук Беларуси и др.

2. Математическая модель системы распределенных вычислений при ограниченном числе копий программного ресурса

Конструктивными элементами для построения математических моделей функционирования распределенных вычислительных систем являются понятия *процесса* и *программного ресурса*. Как и в работах [9-19] *процесс* будем рассматриваться как выполнение последовательности наборов блоков $I_s = (1, 2, \dots, s)$. Для ускорения выполнения процессы могут выполняться параллельно на разных вычислительных устройствах или псевдопараллельно на одном вычислительном устройстве взаимодействуя между собой. Процессы, которые влияют на поведение друг друга путем обмена информацией, называют *взаимодействующими* процессами. Многократно выполняемую в многопроцессорной системе программу или ее часть будем называть *программным ресурсом* (ПР), а множество процессов его выполняющим – *конкурирующими*.

При решении задач организации взаимодействия в МС и ВК конкурирующих процессов используется концепция *структурирования*. Структурирование предполагает разбиение программы решения сложной задачи на составные ее части (подпрограммы, процедуры, блоки) с последующей организацией линейного или частичного порядка выполнения на множестве этих частей. Как правильно осуществить разбиение сложной программы или системы? На сколько составных частей производить разбиение?

Пусть ПР – программный ресурс, $n \geq 2$ число взаимодействующих конкурирующих процессов. Требуется организовать вычислительный процесс таким образом, чтобы общее время выполнения n процессов, использующих ПР, было минимальным. Одной из стратегий решения данной задачи на $p \geq 2$ процессорах является предоставление каждому процессу отдельной копии ПР. Но этот путь не всегда осуществим из-за ограниченного объема ресурсов вычислительной системы и тем более трудно достижим в случае больших программ, используемых в качестве программных ресурсов. Поэтому при решении данной задачи применяется стратегия последовательного обслуживания n процессов с использованием различных механизмов их синхронизации. В этом случае суммарное время выполнения процессов составит величину $T_{sum} = nT$, где T – время выполнения каждым из процессов программного ресурса.

Время T_{sum} можно существенно сократить, если обеспечить структурирование программного ресурса на блоки $Q_1, Q_2, \dots, Q_s$ с последующей конвейеризацией блоков по процессам, а процессов по процессорам многопроцессорной РВС. Структурирование программного ресурса на блоки осуществляется, как правило, либо исходя из физического смысла задачи на этапах создания математической модели и алгоритмов её решения, либо путём анализа готовой, последовательной программы с целью её сегментирования. Число блоков, на которое осуществляется структурирование программного ресурса, зависит от количества процессов и процессоров, длительности выполнения программного ресурса, накладных расходов и других параметров [10-13].

Один из возможных способов (механизмов) взаимодействия процессов, процессоров и блоков следующий. Блоки, процессы и процессоры ВК или МС нумеруются в порядке

1, 2, ..., s , 1, 2, ..., n и 1, 2, ..., p соответственно. Предположим, что все n процессов используют одну копию структурированного программного ресурса. В дальнейшем под процессом будем понимать выполнение всех блоков ПР в порядке 1, 2, ..., s . При этом процесс называется *распределённым*, если все блоки или часть из них выполняются на разных процессорах. Операционная система или специально выделенный организующий процесс предоставляет блоки $Q_1, Q_2, \dots, Q_s$ каждому из процессов в порядке 1, 2, ..., n . В случае распределённой обработки монополизация процессоров процессами не происходит, а блоки одного и того же процесса выполняются на разных процессорах. Очевидно, что при наличии в многопроцессорной системе p процессоров возможно совмещённое во времени выполнение процессов. Запоминание и восстановление промежуточных состояний процессов, запуск процессов на выполнение и их завершение, выбор режимов взаимодействия процессов, процессоров и блоков осуществляет специальная подсистема операционной системы или организующий процесс.

Математическая модель системы распределенной обработки взаимодействующих процессов, конкурирующих за использование ограниченного числа копий структурированного программного ресурса, включает в себя: $p \geq 2$, процессоров многопроцессорной системы, которые имеют доступ к общей памяти; $n \geq 2$, распределенных взаимодействующих конкурирующих процессов; $s \geq 2$, блоков структурированного на блоки программного ресурса; матрицу $T = [t_{ij}]$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, s}$, времен выполнения блоков программного ресурса распределенными взаимодействующими конкурирующими процессами; $2 \leq c \leq p$, число копий структурированного на блоки программного ресурса, которые могут одновременно находиться в оперативной памяти, доступной для всех p процессоров; $\theta > 0$ – параметр, характеризующий время дополнительных системных расходов, связанных с организацией конвейерного режима использования блоков структурированного программного ресурса множеством взаимодействующих конкурирующих процессов при распределенной обработке.

Будем также предполагать, что число процессов n кратно числу копий c структурированного программного ресурса, т. е. $n = mc$, где $m = n/c \geq 2$, и что взаимодействие процессов, процессоров и блоков программного ресурса подчинено следующим условиям: 1) ни один из процессоров не может обрабатывать одновременно более одного блока; 2) процессы выполняются в параллельно-конвейерном режиме группами, т. е. осуществляется одновременное (параллельное) выполнение c копий каждого блока в сочетании с конвейеризацией группы из c копий Q_j -го блока, $j = \overline{1, s}$, по процессам и процессорам; 3) обработка каждого блока программного ресурса осуществляется без прерываний; 4) в случае, когда число блоков программного ресурса $s \leq \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$, где $[x]$ – целая часть числа, для каждого i -го процесса, где $i = c(l-1) + q$, $l = \overline{1, m}$, $q = \overline{1, c}$, распределение блоков Q_j , $j = \overline{1, s}$, программного ресурса по процессорам осуществляется по правилу: блок с номером j распределяется на процессор с номером $c(j-1) + q$.

В работах [16,17] исследован **асинхронный режим** конвейерной реализации взаимодействия процессов, процессоров и блоков с учетом наличия c копий структурированного программного ресурса, который предполагает, что начало выполнения c копий очередного Q_j -го блока, $j = \overline{1, s}$, определяется наличием c процессоров и готовностью копий блока к

выполнению, при этом программный блок считается готовым к выполнению, если он не выполняется ни на одном из процессоров.

На рис. 1 представлена линейная диаграмма Ганта, иллюстрирующая асинхронный режим выполнения $n = 4$ распределенных конкурирующих процессов, использующих $s = 2$ копии структурированного на $s = 3$ блока программного ресурса в многопроцессорной системе с $p = 7$ процессорами и с заданной матрицей времен выполнения блоков с учетом дополнительных системных расходов $T^\theta = [t_{ij}^\theta]_{4 \times 3} = [t_{ij} + \theta]_{4 \times 3}$.

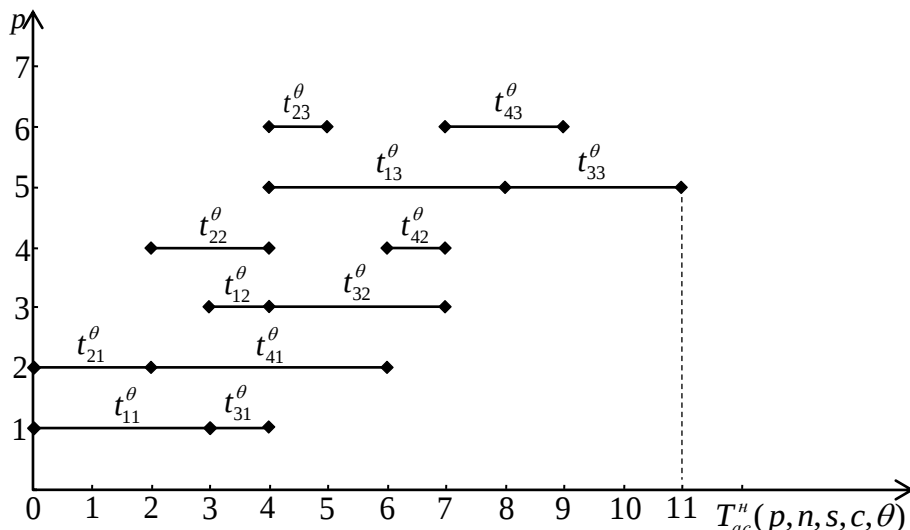


Рис. 1. Асинхронный режим взаимодействия процессов, процессоров и блоков структурированного программного ресурса.

Fig. 1. Asynchronous mode of interaction between processes and processors and blocks of structured software resource.

В работе [20] изучен **первый синхронный режим**, обеспечивающий линейный порядок выполнения блоков программного ресурса внутри каждого из процессов без задержек, т. е. в случае, когда $2 \leq s \leq \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$, момент завершения выполнения Q_j -го блока, $j = \overline{1, s-1}$,

процессом с номером $i = (l-1)c + q$, $l = \overline{1, m}$, $m = \frac{n}{c}$, $q = \overline{1, c}$, на $((j-1)c + q)$ -м процессоре совпадает с моментом начала выполнения следующего Q_{j+1} -го блока на процессоре с номером $(jc + q)$ (рис. 2).

Далее, как и в случае одной копии программного ресурса [7], введем следующие определения.

Определение 1. Система n распределенных конкурирующих процессов называется **неоднородной**, если времена выполнения блоков программного ресурса $Q_1, Q_2, \dots, Q_s$ зависят от объемов обрабатываемых данных и/или их структуры, т. е. разные для разных процессов.

Определение 2. Систему распределенных конкурирующих процессов будем называть **однородной**, если времена выполнения Q_i -го блока каждым из i -х процессов равны, т. е.

$$t_{ij}^{\theta} = t_j^{\theta}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, s}.$$

Определение 3. Систему распределенных конкурирующих процессов будем называть **одинаково распределенной**, если времена выполнения всех блоков ПР каждым из процессов совпадают и равны t_i^θ , т.е. справедлива цепочка равенств $t_{i1}^\theta = t_{i2}^\theta = \dots = t_{is}^\theta = t_i^\theta$, для всех $i = \overline{1, n}$.

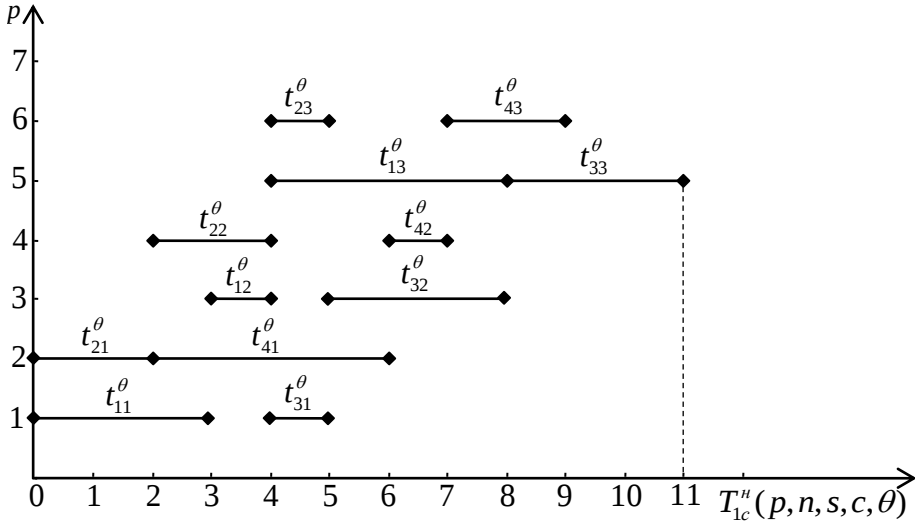


Рис. 2. Первый синхронный режим взаимодействия процессов, процессоров и блоков.
Fig. 2. The first synchronous mode of interaction between processes, processors and blocks.

3. Время реализации неоднородных распределенных процессов

В рамках математической модели организации распределенной обработки конкурирующих процессов с учетом ограниченного числа копий структурированного программного ресурса, введенной в п. 2, исследуем **второй синхронный режим** взаимодействия процессов, процессоров и блоков, который обеспечивает непрерывное выполнение каждого блока

программного ресурса всеми процессами, т.е. в случае, когда $2 \leq s \leq \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor$, момент

завершения выполнения i -м процессом, где $i = (l-1)c + q$, $l = \overline{1, m-1}$, $q = \overline{1, c}$, j -го блока, $j = \overline{1, s}$, на $((j-1)c + q)$ -м процессоре совпадает с моментом начала выполнения j -го блока процессом с номером $(i+c)$ на этом же процессоре (рис. 3).

Через $T_{2c}^n(p, n, s, c, \theta)$ обозначим минимальное общее время выполнения во втором синхронном режиме на p процессорах n **неоднородных** распределенных конкурирующих процессов использующих c копий структурированного на s блоков программного ресурса с матрицей времен выполнения с учетом дополнительных системных расходов $T^\theta = [t_{ij}^\theta]_{n \times s}$.

Для дальнейшего исследования множество из n процессов разобьем на c подмножеств по m процессов в каждом. В каждое q -е подмножество, $q = \overline{1, c}$, будут включены процессы с номерами $i = c(l-1) + q$, $l = \overline{1, m}$.

При $s = \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$ рассматриваемый синхронный режим взаимодействия процессов, процессоров и блоков, обеспечивающий непрерывное выполнение каждого из блоков программного ресурса по процессам, совпадает с технологией выполнения операций в многостадийной задаче теории расписаний с m требованиями и s приборами, когда каждый прибор обслуживает требования непрерывно одно за другим [7].

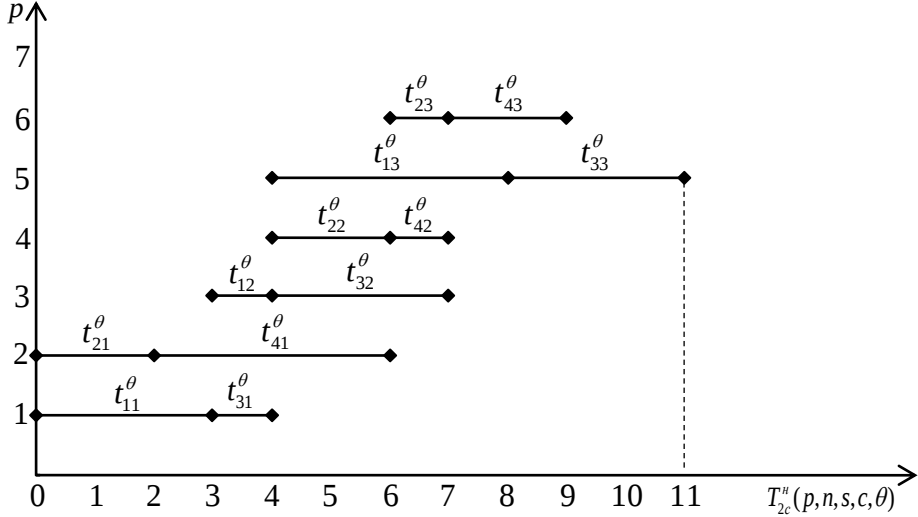


Рис. 3. Второй синхронный режим взаимодействия процессов, процессоров и блоков.
Fig. 3. The second synchronous mode of interaction between processes, processors and blocks.

Следовательно, общее время выполнения n неоднородных конкурирующих распределенных процессов будет определяться при $s = \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$ функционалом этой задачи. Обозначив через

$t_{ij}^q = t_{c(i-1)+q, j}^{\theta}$, $q = \overline{1, c}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil}$, время выполнения i -м процессом из q -го подмножества процессов j -го блока с учетом параметра θ , получим:

$$T_{2c}^n(p, n, s, c, \theta) = T_{2c}^n\left(p, n, \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil, c, \theta\right) = \max_{1 \leq q \leq c} \left(\sum_{j=1}^{\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil - 1} \max_{1 \leq v \leq m} \left[\sum_{i=1}^v t_{c(i-1)+q, j}^{\theta} - \sum_{i=1}^{v-1} t_{c(i-1)+q, j+1}^{\theta} \right] + \sum_{i=1}^m t_{c(i-1)+q, \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil}^{\theta} \right). \quad (1)$$

Здесь $\max_{1 \leq v \leq m} \left[\sum_{i=1}^v t_{c(i-1)+q, j}^{\theta} - \sum_{i=1}^{v-1} t_{c(i-1)+q, j+1}^{\theta} \right]$, $j = \overline{1, \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil - 1}$ – начало выполнения j -го блока,

начиная со второго, первого процесса из q -го подмножества процессов, а $\sum_{i=1}^m t_{c(i-1)+q, \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil}^{\theta}$ – общее время выполнения последнего блока всеми m процессами q -го подмножества, где $q = \overline{1, c}$.

Очевидно, что при $2 \leq s < \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$ формула (1) будет иметь вид:

$$T_{2c}''(p, n, s, c, \theta) = \max_{1 \leq q \leq c} \left(\sum_{j=1}^{s-1} \max_{1 \leq v \leq m} \left[\sum_{i=1}^v t_{c(i-1)+q, j}^{\theta} - \sum_{i=1}^{v-1} t_{c(i-1)+q, j+1}^{\theta} \right] + \sum_{i=1}^m t_{c(i-1)+q, s}^{\theta} \right).$$

Рассмотрим случай, когда $s = k \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$, $k > 1$ (рис. 4).

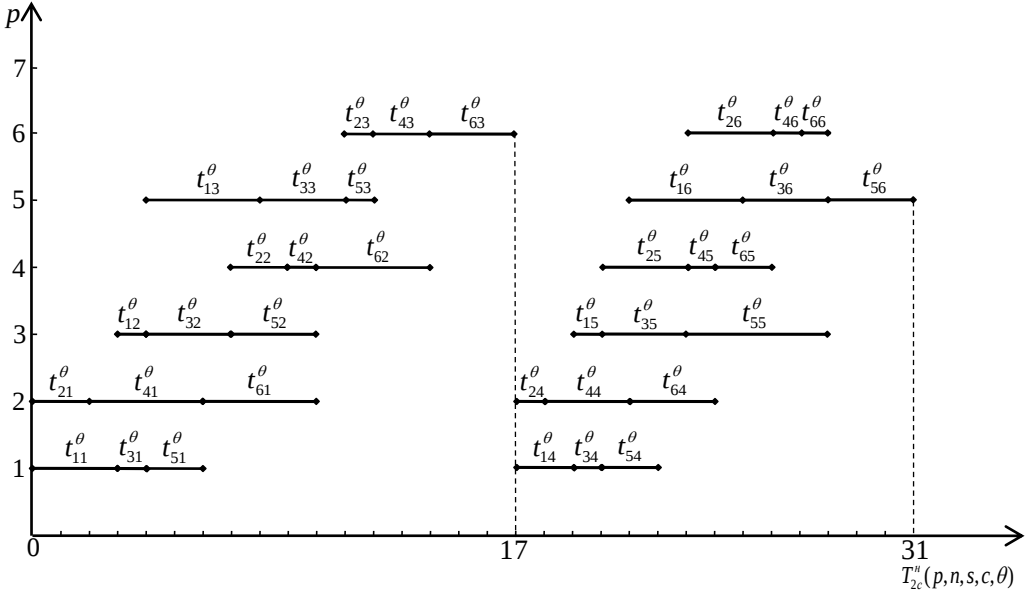


Рис. 4. Несовмещенные диаграммы Ганта при $s = k \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$, $k > 1$.

Fig. 4. Unaligned Gantt charts when $s = k \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$, $k > 1$.

Для дальнейшего исследования, как и при достаточном числе процессоров, все множество процессов разобьем на подмножества, причем каждое q -е подмножество, $q = \overline{1, c}$, будет состоять из m процессов с номерами $i = c(l-1) + q$, $l = \overline{1, m}$, которые будут выполняться на процессорах с номерами $(c(j-1) + q)$, $j = \overline{1, \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil}$. Введем следующие обозначения:

- $t_{ij}^{\varphi, q}$ – время выполнения в φ -ой группе блоков i -м процессом из q -го подмножества процессов j -го блока с учетом параметра θ :

$$t_{ij}^{\varphi, q} = t_{c(i-1)+q, (\varphi-1)\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil + j}^{\theta}, \quad \varphi = \overline{1, k}, \quad q = \overline{1, c}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil};$$

- T_q^{φ} – время выполнения в φ -ой группе блоков q -го подмножества процессов:

$$T_q^\varphi = \sum_{i=1}^{m-1} \max_{1 \leq u \leq \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor} \left[\sum_{j=1}^u t^\theta_{c(i-1)+q, (\varphi-1) \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + j} - \sum_{j=1}^{u-1} t^\theta_{ci+q, (\varphi-1) \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + j} \right] + \sum_{j=1}^{\left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor} t^\theta_{c(m-1)+q, (\varphi-1) \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + j},$$

$$\varphi = \overline{1, k}, \quad q = \overline{1, c};$$

- T_φ^θ – общее время выполнения φ -ой группы блоков всеми n процессами на $c \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor$ процессорах с учетом параметра θ :

$$T_\varphi^\theta = \max_{1 \leq q \leq c} \left(\sum_{i=1}^{m-1} \max_{1 \leq u \leq \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor} \left[\sum_{j=1}^u t^\theta_{c(i-1)+q, (\varphi-1) \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + j} - \sum_{j=1}^{u-1} t^\theta_{ci+q, (\varphi-1) \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + j} \right] + \sum_{j=1}^{\left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor} t^\theta_{c(m-1)+q, (\varphi-1) \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + j} \right) = \max_{1 \leq q \leq c} T_q^\varphi, \quad \varphi = \overline{1, k};$$

- $E_{ij}^{\varphi, q}$ – время завершения обработки в φ -ой группе блоков i -м процессом из q -го подмножества j -го блока:

$$E_{ij}^{\varphi, q} = E_{c(i-1)+q, j}^\varphi = \sum_{\mu=1}^{i-1} \max_{1 \leq u \leq \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor} \left[\sum_{w=1}^u t^\theta_{c(\mu-1)+q, (\varphi-1) \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + w} - \sum_{w=1}^{u-1} t^\theta_{c\mu+q, (\varphi-1) \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + w} \right] + \sum_{w=1}^j t^\theta_{c(i-1)+q, (\varphi-1) \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + w} \quad \varphi = \overline{1, k}, \quad q = \overline{1, c}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = 1, \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor.$$

С учетом обозначений $t_{ij}^{\varphi, q}$, T_φ^θ и $E_{ij}^{\varphi, q}$ и в силу формулы (1) для нахождения времени выполнения φ -й группы блоков всеми n процессами T_φ^θ и времени завершения обработки в φ -ой группе блоков i -м процессом из q -го подмножества j -го блока $E_{ij}^{\varphi, q}$, получим следующие соотношения:

$$T_\varphi^\theta = \max_{1 \leq q \leq c} \left(\sum_{j=1}^{\left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor - 1} \max_{1 \leq v \leq m} \left[\sum_{i=1}^v t^\theta_{c(i-1)+q, (\varphi-1) \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + j} - \sum_{i=1}^{v-1} t^\theta_{c(i-1)+q, (\varphi-1) \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + j+1} \right] + \sum_{i=1}^m t^\theta_{c(i-1)+q, \varphi \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor} \right), \quad (2)$$

$$\varphi = \overline{1, k};$$

$$E_{ij}^{\varphi, q} = \sum_{w=1}^{j-1} \max_{1 \leq v \leq m} \left[\sum_{\mu=1}^v t^\theta_{c(\mu-1)+q, (\varphi-1) \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + w} - \sum_{\mu=1}^{v-1} t^\theta_{c(\mu-1)+q, (\varphi-1) \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + w+1} \right] + \sum_{\mu=1}^i t^\theta_{c(\mu-1)+q, (\varphi-1) \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + j}, \quad \varphi = \overline{1, k}, \quad q = \overline{1, c}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = 1, \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor.$$

Через $B_{ij}^{\varphi, q}$ обозначим время начала выполнения в φ -ой группе блоков первым процессом из q -го подмножества процессов j -го блока:

$$B_{1j}^{\varphi,q} = \sum_{w=1}^{j-1} \max_{1 \leq v \leq m} \left[\sum_{\mu=1}^v t^{\theta} c(\mu-1)+q, (\varphi-1) \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + w - \sum_{\mu=1}^{v-1} t^{\theta} c(\mu-1)+q, (\varphi-1) \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + w+1 \right], \quad (3)$$

$$\varphi = \overline{1, k}, \quad q = \overline{1, c}, \quad j = 1, \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor.$$

Из анализа последовательных диаграмм Ганта следует, что

$$T_{2c}^H(p, n, s, c, \theta) = T_{2c}^H\left(p, n, k \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor, c, \theta\right) = \sum_{\varphi=1}^k T_{\varphi}^{\theta} - \Omega,$$

где $\Omega = \sum_{\varphi=1}^{k-1} \min\{\omega_{\varphi}', \omega_{\varphi}''\}$ является величиной максимально допустимого суммарного совмещения соседних диаграмм по оси времени.

Здесь каждое значение $\min\{\omega_{\varphi}', \omega_{\varphi}''\}$, $\varphi = \overline{1, k-1}$, определяет величину максимально допустимого совмещения по оси времени между парами соседних диаграмм Ганта:

$$\omega_{\varphi}' = \min_{1 \leq q \leq c} \min_{1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor} \{T_{\varphi}^{\theta} - E_{mj}^{\varphi,q} + B_{1j}^{\varphi+1,q}\}; \quad (4)$$

$$\omega_{\varphi}'' = \min_{1 \leq q \leq c} \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ T_{\varphi}^{\theta} - E_m^{\varphi,q} \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + \sum_{\mu=i+1}^m t^{\theta} c(\mu-1)+q, \varphi \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + \sum_{\mu=1}^{i-1} t^{\theta} c(\mu-1)+q, \varphi \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + 1 \right\}, \quad \varphi = \overline{1, k-1}. \quad (5)$$

Тогда для РВС на рис. 4 получим, что $T_{2c}^H(7, 6, 6, 2, \theta) = 17 + 14 - \min\{6, 4\} = 27$ (рис. 5).

Для общего случая, когда $s = k \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + r$, $k \geq 1$, $1 \leq r < \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor$ (рис. 6), общее время

$T_{2c}^H\left(p, n, k \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + r, \theta\right)$ будет определяться по формуле:

$$T_{2c}^H\left(p, n, k \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + r, c, \theta\right) = \sum_{\varphi=1}^k T_{\varphi}^{\theta} + T_{k+1}^{\theta} - \sum_{l=1}^{k-1} \min\{\omega_{\varphi}', \omega_{\varphi}''\} - \min\{\omega_k', \omega_k''\}, \text{ где}$$

$$T_{k+1}^{\theta} = \max_{1 \leq q \leq c} \left(\sum_{j=1}^{r-1} \max_{1 \leq v \leq m} \left[\sum_{i=1}^v t^{\theta} c(i-1)+q, k \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + j - \sum_{i=1}^{v-1} t^{\theta} c(i-1)+q, k \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + j+1 \right] + \sum_{i=1}^m t^{\theta} c(i-1)+q, \varphi \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + r \right), \quad (6)$$

$$\omega_k' = \min_{1 \leq q \leq c} \min_{1 \leq j \leq r} \{T_k^{\theta} - E_{mj}^{k,q} + B_{1j}^{k+1,q}\}, \quad (7)$$

$$\omega_k'' = \min_{1 \leq q \leq c} \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ T_k^{\theta} - E_m^{k,q} \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + \sum_{\mu=i+1}^m t^{\theta} c(\mu-1)+q, k \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + \sum_{\mu=1}^{i-1} t^{\theta} c(\mu-1)+q, k \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + 1 \right\}. \quad (8)$$

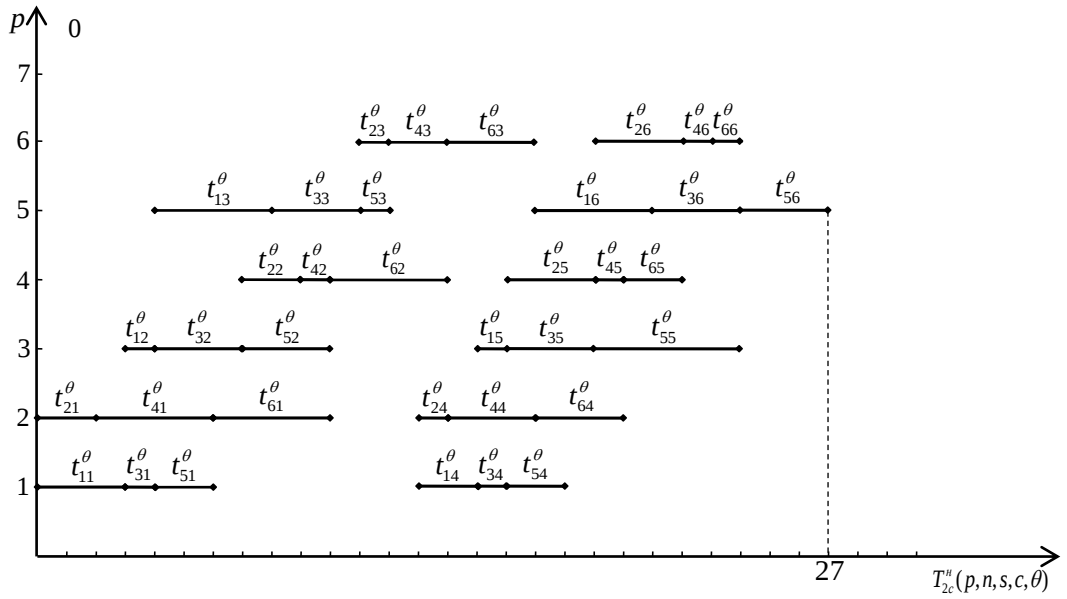


Рис. 5. Совмещенные диаграммы Ганта при $s = k \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$, $k > 1$.

Fig. 5. Combined Gantt charts when $s = k \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$, $k > 1$.

В свою очередь, значения $B_{1j}^{k+1,q}$ с учетом формулы (3) будут найдены из выражения:

$$B_{1j}^{k+1,q} = \sum_{w=1}^{j-1} \max_{1 \leq v \leq m} \left[\sum_{\mu=1}^v t_{c(\mu-1)+q, k \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil + w}^{\theta} - \sum_{\mu=1}^{v-1} t_{c(\mu-1)+q, k \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil + w+1}^{\theta} \right], \quad q = \overline{1, c}, \quad j = \overline{1, r}.$$

Таким образом, имеет место следующая

Теорема 1. Если взаимодействие процессов, процессоров и блоков структурированного программного ресурса подчинено условиям второго синхронного режима, то для любых $p \geq 2$, $n \geq 2$, $s \geq 2$, $2 \leq c \leq p$, $\theta > 0$ минимальное общее время выполнения неоднородных распределенных конкурирующих процессов определяется следующим образом:

$$T_{2c}^u(p, n, s, c, \theta) = \max_{1 \leq q \leq c} \left(\sum_{j=1}^{s-1} \max_{1 \leq v \leq m} \left[\sum_{i=1}^v t_{c(i-1)+q, j}^{\theta} - \sum_{i=1}^{v-1} t_{c(i-1)+q, j+1}^{\theta} \right] + \sum_{i=1}^m t_{c(i-1)+q, s}^{\theta} \right),$$

при $2 \leq s < \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$;

$$T_{2c}^{\theta}(p, n, s, c, \theta) = \begin{cases} \sum_{\varphi=1}^k T_{\varphi}^{\theta} - \sum_{l=1}^{k-1} \min\{\omega_{\varphi}', \omega_{\varphi}''\}, \text{ при } s = k \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil, \quad k > 1; \\ \sum_{\varphi=1}^k T_{\varphi}^{\theta} + T_{k+1}^{\theta} - \sum_{\varphi=1}^{k-1} \min\{\omega_{\varphi}', \omega_{\varphi}''\} - \min\{\omega_k', \omega_k''\}, \\ \text{при } s = k \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil + r, \quad k \geq 1, \quad 1 \leq r < \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil. \end{cases}$$

Здесь T_{φ}^{θ} и T_{k+1}^{θ} вычисляются по формулам (2) и (6), а $\omega_{\varphi}', \omega_{\varphi}'', \varphi = \overline{1, k}$, по формулы (4), (5), (7), (8).

4. Время выполнения однородных распределенных процессов

Через $T_{2c}^o(p, n, s, c, \theta)$ обозначим минимальное общее время выполнения на p процессорах системы n однородных распределенных конкурирующих процессов, использующих s копий структурированного на s блоков программного ресурса с учетом дополнительных системных расходов $\theta > 0$.

При $s \leq \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$ подставив в формулу (1) значения $t_{ij}^{\theta} = t_j^{\theta}$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, s}$, и проведя несложные преобразования, получим:

$$T_{2c}^o(p, n, s, c, \theta) = \sum_{j=1}^{s-1} \max_{1 \leq v \leq m} \left[\sum_{i=1}^v t_j^{\theta} - \sum_{i=1}^{v-1} t_{j+1}^{\theta} \right] + \sum_{i=1}^m t_s^{\theta} = \sum_{j=1}^s t_j^{\theta} + (m-1) \left(t_s^{\theta} + \sum_{j=2}^s \max\{t_{j-1}^{\theta} - t_j^{\theta}, 0\} \right).$$

Итак, если обозначить длительность выполнения программного ресурса каждым из процессов через $T_s^{\theta} = \sum_{j=1}^s t_j^{\theta}$, то при $s \leq \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$, имеем:

$$T_{2c}^o(p, n, s, c, \theta) = T_s^{\theta} + (m-1) \left(t_s^{\theta} + \sum_{j=2}^s \max\{t_{j-1}^{\theta} - t_j^{\theta}, 0\} \right).$$

Рассмотрим случай, когда $s = k \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$, $k > 1$.

Используя прием совмещения последовательных диаграмм Ганта, получим следующую формулу для вычисления $T_{2c}^o\left(p, n, k \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil, c, \theta\right)$:

$$T_{2c}^o\left(p, n, k \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil, c, \theta\right) = \sum_{\varphi=1}^k T_{\varphi}^{\theta} - \sum_{\varphi=1}^{k-1} \min\{\psi_{\varphi}', \psi_{\varphi}''\},$$

где T_{φ}^{θ} , $\varphi = \overline{1, k}$ – общее время выполнения φ -х $\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$ блоков структурированного программного ресурса всеми n процессами на $c \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$ процессорах, а ψ_{φ}' и ψ_{φ}'' представляют

собой отрезки возможного совмещения двух последовательных диаграмм по оси времени, $\varphi = 1, k-1$. Значения T_{φ}^{θ} , ψ_{φ}' и ψ_{φ}'' находятся по следующим формулам:

$$T_{\varphi}^{\theta} = \sum_{j=1}^{\lfloor p/c \rfloor} t_{(\varphi-1)\lfloor \frac{p}{c} \rfloor + j}^{\theta} + (m-1) \left(t_{\varphi \lfloor \frac{p}{c} \rfloor}^{\theta} + \sum_{j=2}^{\lfloor p/c \rfloor} \max \{ t_{(\varphi-1)\lfloor \frac{p}{c} \rfloor + j-1}^{\theta} - t_{(\varphi-1)\lfloor \frac{p}{c} \rfloor + j}^{\theta}, 0 \} \right), \quad \varphi = \overline{1, k}; \quad (9)$$

$$\psi_{\varphi}' = \min_{1 \leq j \leq \lfloor \frac{p}{c} \rfloor} \{ T_{\varphi}^{\theta} - E_{mj}^{\varphi} + B_{1j}^{\varphi+1} \}, \quad (10)$$

$$\psi_{\varphi}'' = (m-1) \min \{ t_{\varphi \lfloor \frac{p}{c} \rfloor}^{\theta}, t_{\varphi \lfloor \frac{p}{c} \rfloor + 1}^{\theta} \}, \quad \varphi = \overline{1, k-1}. \quad (11)$$

Здесь $t_{(\varphi-1)\lfloor \frac{p}{c} \rfloor + j}^{\theta}$ – время выполнения в φ -ой группе j -го блока каждым из m процессов,

E_{ij}^{φ} – времена завершения обработки в φ -ой группе блоков i -м процессом j -го блока, а

B_{1j}^{φ} – время начала выполнения в φ -ой группе блоков первым процессом j -го блока:

$$B_{1j}^{\varphi} = \sum_{w=1}^{j-1} \max_{1 \leq v \leq m} \left[vt_{(\varphi-1)\lfloor \frac{p}{c} \rfloor + w}^{\theta} - (v-1)t_{(\varphi-1)\lfloor \frac{p}{c} \rfloor + w+1}^{\theta} \right],$$

$$E_{ij}^{\varphi} = \sum_{w=1}^{j-1} \max_{1 \leq v \leq m} \left[vt_{(\varphi-1)\lfloor \frac{p}{c} \rfloor + w}^{\theta} - (v-1)t_{(\varphi-1)\lfloor \frac{p}{c} \rfloor + w+1}^{\theta} \right] + it_{(\varphi-1)\lfloor \frac{p}{c} \rfloor + j}^{\theta}, \quad \varphi = \overline{1, k}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, \lfloor \frac{p}{c} \rfloor}.$$

Для случая $s = k \lfloor \frac{p}{c} \rfloor + r$, $k \geq 1$, $1 \leq r < \lfloor \frac{p}{c} \rfloor$, общее время выполнения множества однородных распределенных конкурирующих процессов определяется по формуле:

$$T_{2c}^{\theta}(p, n, kp, c, \theta) = \sum_{\varphi=1}^k T_{\varphi}^{\theta} + T_{k+1}^{\theta} - \sum_{\varphi=1}^{k-1} \min \{ \psi_{\varphi}', \psi_{\varphi}'' \} - \min \{ \psi_k', \psi_k'' \}.$$

Здесь

$$T_{k+1}^{\theta} = \sum_{j=1}^r t_{k \lfloor \frac{p}{c} \rfloor + j}^{\theta} + (m-1) \left(t_{k \lfloor \frac{p}{c} \rfloor + r}^{\theta} + \sum_{j=2}^r \max \{ t_{k \lfloor \frac{p}{c} \rfloor + j-1}^{\theta} - t_{k \lfloor \frac{p}{c} \rfloor + j}^{\theta}, 0 \} \right) \quad (12)$$

и обозначает время выполнения последних r блоков всеми n процессами, а $\min \{ \psi_k', \psi_k'' \}$ – величина максимального совмещения по оси времени k -й и $(k+1)$ -й диаграмм:

$$\psi_k' = \min_{1 \leq j \leq r} \{ T_k^{\theta} - E_{mj}^k + B_{1j}^{k+1} \}, \quad \psi_k'' = (m-1) \min \{ t_{k \lfloor \frac{p}{c} \rfloor}^{\theta}, t_{k \lfloor \frac{p}{c} \rfloor + 1}^{\theta} \}, \quad (13)$$

$$B_{1j}^{k+1} = \sum_{w=1}^{j-1} \max_{1 \leq v \leq m} \left[vt_{k \lfloor \frac{p}{c} \rfloor + w}^{\theta} - (v-1)t_{k \lfloor \frac{p}{c} \rfloor + w+1}^{\theta} \right], \quad j = \overline{1, r}.$$

Таким образом, имеет место

Теорема 2. Если взаимодействие процессов, процессоров и блоков структурированного программного ресурса подчинено условиям второго синхронного режима, то для любых

$p \geq 2, n \geq 2, s \geq 2, 2 \leq c \leq p, \theta > 0$ минимальное общее время выполнения однородных распределенных конкурирующих процессов определяется по формулам:

$$T_{2c}^o(p, n, s, c, \theta) = T_s^\theta + (m-1) \left(t_s^\theta + \sum_{j=2}^s \max\{t_{j-1}^\theta - t_j^\theta, 0\} \right), \text{ при } 2 \leq s \leq \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor;$$

$$T_{2c}^o(p, n, s, c, \theta) = \begin{cases} \sum_{\varphi=1}^k T_\varphi^\theta - \sum_{\varphi=1}^{k-1} \min\{\psi_\varphi', \psi_\varphi''\}, \text{ при } s = k \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor, k > 1; \\ \sum_{\varphi=1}^{k+1} T_\varphi^\theta - \sum_{\varphi=1}^k \min\{\psi_\varphi', \psi_\varphi''\}, \text{ при } s = k \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + r, k \geq 1, 1 \leq r < \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor. \end{cases}$$

Здесь $T_\varphi^\theta, \varphi = \overline{1, k+1}$, вычисляются по формулам (9) и (12), а $\psi_\varphi', \psi_\varphi'', \varphi = \overline{1, k}$, по формулы (10), (11), (13).

5. Время выполнения одинаково распределенных процессов

Обозначим через $T_{2c}^{op}(p, n, s, c, \theta)$ минимальное общее время выполнения n одинаково распределенных конкурирующих процессов в многопроцессорной системе с p процессорами во втором синхронном режиме взаимодействия процессов, процессоров и блоков с учетом параметра $\theta > 0$, характеризующего время дополнительных системных расходов, связанных с организацией параллельного использования s блоков структурированного программного ресурса множеством конкурирующих процессов при распределенной обработке.

Теорема 3. Минимальное общее время выполнения множества конкурирующих одинаково распределенных процессов во втором синхронном режиме при любых $p \geq 2, n \geq 2, s \geq 2, 2 \leq c \leq p, \theta > 0$ определяется по формулам:

$$T_{2c}^{op}(p, n, s, c, \theta) =$$

$$= \max_{1 \leq q \leq c} \begin{cases} T_q^\theta + (s-1)t_{\max}^q, \text{ при } 2 \leq s \leq \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor, \text{ или } s > \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor, \text{ но } T_q^\theta \leq \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor t_{\max}^q, \\ kT_q^\theta + \left(\left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor - 1 \right) t_{\max}^q, \text{ при } s = k \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor, k > 1, T_q^\theta > \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor t_{\max}^q, \\ (k+1)T_q^\theta + (r-1)t_{\max}^q, \text{ при } s = k \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + r, k \geq 1, 1 \leq r < \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor, T_q^\theta > \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor t_{\max}^q. \end{cases}$$

Доказательство. При $s \leq \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor$ для неоднородных систем распределенных конкурирующих процессов имеет место формула:

$$T_{2c}^u(p, n, s, c, \theta) = \max_{1 \leq q \leq c} \left(\sum_{j=1}^{s-1} \max_{1 \leq v \leq m} \left[\sum_{i=1}^v t_{c(i-1)+q, j}^\theta - \sum_{i=1}^{v-1} t_{c(i-1)+q, j+1}^\theta \right] + \sum_{i=1}^m t_{c(i-1)+q, s}^\theta \right).$$

Для одинаково распределенных систем конкурирующих процессов времена t_{ij}^θ выполнения блоков $Q_j, j = \overline{1, s}$, программного ресурса каждым из i -х процессов совпадают и равны t_i^θ для всех $i = \overline{1, n}$, т. е. справедлива цепочка равенств $t_{i1}^\theta = t_{i2}^\theta = \dots = t_{is}^\theta = t_i^\theta, i = \overline{1, n}$, следовательно:

$$T_{2c}^{op}(p, n, s, c, \theta) = \max_{1 \leq q \leq c} \left(\sum_{j=1}^{s-1} \max_{1 \leq v \leq m} \left[\sum_{i=1}^v t_{c(i-1)+q}^{\theta} - \sum_{i=1}^{v-1} t_{c(i-1)+q}^{\theta} \right] + \sum_{i=1}^m t_{c(i-1)+q}^{\theta} \right) = \max_{1 \leq q \leq c} (T_q^{\theta} + (s-1)t_{\max}^q). \quad (14)$$

Здесь $T_q^{\theta} = \sum_{i=1}^m t_{c(i-1)+q}^{\theta}$ – суммарное время выполнения q -й группы блоков всеми m процессами, а $t_{\max}^q = \max_{1 \leq i \leq m} t_{c(i-1)+q}^{\theta}$ – максимальное время выполнения блока из этой группы, $q = \overline{1, c}$.

Рассмотрим случай, когда $s = k \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil$, $k > 1$ и $T_q^{\theta} > \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil t_{\max}^q$, $q = \overline{1, c}$, тогда

$$T_{2c}^{op}(p, n, s, c, \theta) = T_{2c}^{op} \left(p, n, k \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil, c, \theta \right) = \sum_{\varphi=1}^k T_{\varphi}^{\theta} - \sum_{\varphi=1}^{k-1} \min \{ \xi'_{\varphi}, \xi''_{\varphi} \}. \quad (15)$$

С учетом формулы (14) время выполнения φ -й группы блоков T_{φ}^{θ} будет определяться по формуле:

$$T_{\varphi}^{\theta} = \max_{1 \leq q \leq c} \left(T_q^{\theta} + \left(\left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil - 1 \right) t_{\max}^q \right), \quad \varphi = \overline{1, k}. \quad (16)$$

Согласно (4) и (5) формулы для величин максимально допустимого совмещения по оси времени между парами соседних диаграмм Ганта ξ'_{φ} и ξ''_{φ} , $\varphi = \overline{1, k-1}$, для одинаково распределенных процессов будут иметь вид:

$$\xi'_{\varphi} = \min_{1 \leq q \leq c} \min_{1 \leq j \leq \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil} \{ T_{\varphi}^{\theta} - E_{mj}^{\varphi, q} + B_{1j}^{\varphi+1, q} \}; \quad (17)$$

$$\xi''_{\varphi} = \min_{1 \leq q \leq c} \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ T_{\varphi}^{\theta} - E_{m \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil}^{\varphi, q} + \sum_{\mu=i+1}^m t_{c(\mu-1)+q}^{\theta} + \sum_{\mu=1}^{i-1} t_{c(\mu-1)+q}^{\theta} \right\}, \quad \varphi = \overline{1, k-1}. \quad (18)$$

Так как $t_{ij}^{\theta} = t_i^{\theta}$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, s}$, следовательно, времена начала выполнения в φ -ой группе блоков первым процессом из q -го подмножества процессов j -го блока $B_{1j}^{\varphi, q}$ и времена завершения обработки в φ -ой группе блоков i -м процессом из q -го подмножества j -го блока $E_{ij}^{\varphi, q}$, будут определяться по формулам:

$$B_{1j}^{\varphi, q} = (j-1)t_{\max}^q, \quad \varphi = \overline{1, k}, \quad q = \overline{1, c}, \quad j = \overline{1, \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil}; \quad (19)$$

$$E_{ij}^{\varphi, q} = (j-1)t_{\max}^q + \sum_{\mu=1}^i t_{c(\mu-1)+q}^{\theta}, \quad \varphi = \overline{1, k}, \quad q = \overline{1, c}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, \left\lceil \frac{p}{c} \right\rceil}. \quad (20)$$

Подставим (16), (19), (20) в (17) и (18), получим:

$$\begin{aligned}\xi_{\varphi}' &= \min_{1 \leq q \leq c} \min_{1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor} \left\{ T_q^{\theta} + \left(\left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor - 1 \right) t_{\max}^q - (j-1)t_{\max}^q - \sum_{\mu=1}^m t_{c(\mu-1)+q}^{\theta} + (j-1)t_{\max}^q \right\} = \\ &= \min_{1 \leq q \leq c} \left\{ \left(\left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor - 1 \right) t_{\max}^q \right\};\end{aligned}\quad (21)$$

$$\begin{aligned}\xi_{\varphi}'' &= \min_{1 \leq q \leq c} \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ T_q^{\theta} + \left(\left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor - 1 \right) t_{\max}^q - \left(\left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor - 1 \right) t_{\max}^q - \sum_{\mu=1}^m t_{c(\mu-1)+q}^{\theta} + \sum_{\mu=i+1}^m t_{c(\mu-1)+q}^{\theta} + \sum_{\mu=1}^{i-1} t_{c(\mu-1)+q}^{\theta} \right\} = \\ &= \min_{1 \leq q \leq c} \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \sum_{\mu=i+1}^m t_{c(\mu-1)+q}^{\theta} + \sum_{\mu=1}^{i-1} t_{c(\mu-1)+q}^{\theta} \right\} \leq \min_{1 \leq q \leq c} \{ (m-1)t_{\max}^q \}.\end{aligned}\quad (22)$$

По условию $\left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor t_{\max}^q < T_q^{\theta} = \sum_{i=1}^m t_{c(i-1)+q}^{\theta} \leq m t_{\max}^q$, следовательно:

$$\min_{1 \leq q \leq c} \left\{ \left(\left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor - 1 \right) t_{\max}^q, (m-1)t_{\max}^q \right\} = \min_{1 \leq q \leq c} \left\{ \left(\left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor - 1 \right) t_{\max}^q \right\}.$$

Получили, что (15) после преобразования будет иметь вид второй формулы теоремы 3:

$$\begin{aligned}T_{2c}^{op} \left(p, n, k \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor, c, \theta \right) &= \max_{1 \leq q \leq c} \left\{ \sum_{\varphi=1}^k \left(T_q^{\theta} + \left(\left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor - 1 \right) t_{\max}^q \right) - \sum_{\varphi=1}^{k-1} \left(\left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor - 1 \right) t_{\max}^q \right\} = \\ &= \max_{1 \leq q \leq c} \left\{ k T_q^{\theta} + \left(\left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor - 1 \right) t_{\max}^q \right\}.\end{aligned}$$

Для случая $s = k \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + r$, $k \geq 1$, $1 \leq r < \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor$, $T_q^{\theta} > \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor t_{\max}^q$, общее время

$T_{2c}^{op} \left(p, n, k \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + r, c, \theta \right)$ аналогично формуле (15) будет определяться следующим образом:

$$T_{2c}^{op} \left(p, n, k \left\lfloor \frac{p}{c} \right\rfloor + r, c, \theta \right) = \sum_{\varphi=1}^k T_{\varphi}^{\theta} - \sum_{\varphi=1}^{k-1} \min \{ \xi_{\varphi}', \xi_{\varphi}'' \} + T_{k+1}^{\theta} - \min \{ \xi_k', \xi_k'' \}.\quad (23)$$

Здесь время выполнения $(k+1)$ -ой группы блоков T_{k+1}^{θ} с учетом (16) будет определяться по формуле:

$$T_{k+1}^{\theta} = \max_{1 \leq q \leq c} (T_q^{\theta} + (r-1)t_{\max}^q).\quad (24)$$

В $(k+1)$ -ой группе блоков времена начала выполнения первым процессом из q -го подмножества процессов и времена завершения обработки i -м процессом из q -го подмножества j -го блока с учетом (19) и (20) будут определяться по формулам:

$$\begin{aligned}B_{1j}^{k+1,q} &= (j-1)t_{\max}^q, \quad q = \overline{1, c}, \quad j = \overline{1, r}; \\ E_{ij}^{k+1,q} &= (j-1)t_{\max}^q + \sum_{\mu=1}^i t_{c(\mu-1)+q}^{\theta}, \quad q = \overline{1, c}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, r}.\end{aligned}\quad (25)$$

Подставив формулы (16), (20) и (25) в (17) и (18), для нахождения ξ_k' и ξ_k'' получим формулы аналогичные (21) и (22), следовательно,

$$T_{2c}^{op}\left(p, n, k\left[\frac{p}{c}\right] + r, c, \theta\right) = \max_{1 \leq q \leq c} ((k+1)T_q^\theta + (r-1)r_{\max}^q),$$

что доказывает третью формулу теоремы 3.

6. Заключение

В статье проведено исследование базового второго синхронного режима взаимодействия процессов, процессоров и блоков структурированного программного ресурса при котором обеспечивается непрерывное выполнение каждого блока всеми процессами. В случаях неограниченного и ограниченного параллелизма по числу процессоров распределенной вычислительной системы получены формулы для вычисления минимального времени выполнения множества неоднородных, однородных и одинаково распределенных процессов конкурирующих за использование ограниченного числа копий программного ресурса. Полученные математические соотношения позволят в дальнейшем выполнить сравнительный анализ введенных режимов, провести математическое исследование эффективности и оптимальности организации распределенных вычислений, решить задачи по расчету оптимальных характеристик многопроцессорных распределенных вычислительных систем.

Список литературы / References

- [1]. Andrew S. Tanenbaum, Maarten Van Steen. Distributed Systems. Amazon Digital Services LLC, 2023. 684 p.
- [2]. Robey R., Zamora Y. Parallel and High Performance Computing. Manning, 2021. 800 p.
- [3]. Бабичев С.Л., Коньков К.А. Распределенные системы. М.: Юрайт, 2019. 507 с. / Babichev S., Konkov K. Distributed Systems. Moscow, Juright, 2019, 507 p. (in Russian)
- [4]. Топорков В.В., Емельянов Д.М. Модели, методы и алгоритмы планирования в грид и облачных вычислениях. Вестник Московского энергетического института. 2018, №6. С. 75-86. / Toporkov V., Emelyanov D. Models, methods and algorithms for planning in grid and cloud computing. Bulletin of the Moscow Energy Institute. 2018, №6. pp. 75-86. (in Russian)
- [5]. Антонов А.С., Афанасьев И.В., Воеводин Вл.В. Высокопроизводительные вычислительные платформы: текущий статус и тенденция развития. Вычислительные методы и программирование. 2021, Том 22. С. 135-177. / Antonov A., Afanasyev I., Voevodin Vl.V. High-performance computing platforms: current status and development trends. Computational methods and programming. 2021, Volume 22. pp. 135-177. (in Russian)
- [6]. Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К. Многогранники. Графы. Оптимизация. М.: Наука, 1981. 344 с. / Emelichev V., Kovalev M., Kravtsov M. Polyhedra. Graphs. Optimization. Moscow, Nauka, 1981, 344 p. (in Russian)
- [7]. Танаев В.С., Сотсков Ю.Н., Струевич В.А. Теория расписаний. Многостадийные системы. М.: Наука, 1989. 327 с. / Tanaev V., Sotskov Yu., Strusevich V. Polyhedra. Graphs. Optimization. Moscow, Nauka, 1989, 327 p. (in Russian)
- [8]. Лазарев А.А. Теория расписаний. Методы и алгоритмы. М.: ИПУ РАН, 2019. 408 с. / Lazarev A. Scheduling theory. Methods and algorithms. Moscow, ICS RAS, 2019, 408 p. (in Russian)
- [9]. Павлов П.А. Организация однородных конкурирующих процессов при распределенной конвейерной обработке. Проблемы управления. 2010, №3. С. 66-75. / Pavlov P. Organization of homogeneous competing processes in distributed pipeline processing. Control Sciences. 2010, №3. pp. 66-75. (in Russian)
- [10]. Павлов П.А. Оптимальность структурирования программных ресурсов при конвейерной распределенной обработке. Программные продукты и системы. 2010, №3. С. 79-85. / Pavlov P. Optimal structuring of software resources during pipeline distributed processing. Software products and systems. 2010, №3. pp. 79-85. (in Russian)

- [11]. Павлов П.А. Задача оптимизации числа процессоров при распределенной обработке. Вестник государственного Самарского аэрокосмического университета имени академика С.П. Королева. 2011, №4. С. 230-240. / Pavlov P. The problem of optimizing the number of processors in distributed processing. Bulletin of the State Samara Aerospace University named after Academician S.P. Koroleva. 2011, №4. pp. 230-240. (in Russian)
- [12]. Pavlov P.A. The optimality of software resources structuring through the pipeline distributed processing of competitive cooperative processes. *International Journal of Multimedia Technology (IJMT)*. 2012, Vol.2, №1. pp. 5–10.
- [13]. Kovalenko N.S., Pavlov P.A. Optimal Grouping Algorithm of Identically Distributed Systems. *Programming and Computer Software*. 2012, №3. pp. 143-150.
- [14]. Павлов П.А. Время реализации асинхронных параллельных процессов при макроконвейерной сосредоточенной обработке. Проблемы информатики. 2014, №3. С. 37–52. / Pavlov P. Implementation time of asynchronous parallel processes in macro-pipeline concentrated processing. *Problems of computer science*. 2014, №3. pp. 37-52. (in Russian)
- [15]. Zaiets N., Shtepa V., Pavlov P., Elperin I., Hachkovska M. Development of a resource-process approach to increasing the efficiency of electrical equipment for food production. *Eastern-European Journal of Enterprise Nechnologies*. 2019, №8 (101). pp. 59-65.
- [16]. Павлов П.А., Коваленко Н.С. Распределенные вычисления при ограниченном числе копий программного ресурса. Программные продукты и системы. 2011, №4. С. 155-163. / Pavlov P., Kovalenko N. Distributed computing with a limited number of copies of a software resource. *Software products and systems*. 2011, №4. pp. 155-163. (in Russian)
- [17]. Kovalenko N.S., Pavlov P.A., Ovseev M.I. Asynchronous distributed computations with a limited number of copies of a structured program resource. *Cybernetics and systems analysis*. 2012, №1. pp. 86-98.
- [18]. Pavlov P.A. Resource-process model of distributed computing with a limited number of software resource copies. *Challenger and problems of modern science: proceedings of the IX international scientific conference*. London, Great Britain. 2023, pp. 13-21.
- [19]. Pavlov P.A. Asynchronous mode of distributed computing with a limited number of copies of a program resource. *Theoretical and practical perspectives of modern science: proceedings of the IV international scientific and practical conference*, Stockholm, Sweden. 2023, pp. 10-20.
- [20]. Павлов П.А., Коваленко Н.С. Синхронный режим распределенных вычислений при непрерывном выполнении блоков ограниченного числа копий программного ресурса. Программные продукты и системы. 2024, №1. С. 43-53. / Pavlov P., Kovalenko N. Synchronous mode of distributed computing with continuous execution of blocks of a limited number of copies of a software resource. *Software products and systems*. 2024, №1. pp. 43-53. (in Russian)
- [21]. Павлов П.А., Коваленко Н.С. Синхронный режим распределенных вычислений при непрерывном выполнении блоков ограниченного числа копий программного ресурса. Программные продукты и системы. 2024, №1. С. 43-53. / Pavlov P., Kovalenko N. Synchronous mode of distributed computing with continuous execution of blocks of a limited number of copies of a software resource. *Software products and systems*. 2024, №1. pp. 43-53. (in Russian)

Информация об авторах / Information about authors

Павел Александрович ПАВЛОВ – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры информационных технологий и интеллектуальных систем Полесского государственного университета. Сфера научных интересов: математическое моделирование распределенных вычислительных систем конкурирующих процессов, исследование операций, математическое программирование.

Pavel Aleksandrovich PAVLOV – PhD, Associate Professor of the department of information technologies and intelligent systems (Polessky state university). Research interests: mathematical modeling of distributed computing systems of competing processes, operations research, mathematical programming.