



DOI: 10.15514/ISPRAS-2025-37(1)-13

## Модификация метода погруженных границ LS-STAG для моделирования течений неньютоновских вязких жидкостей

<sup>1</sup> И.К. Марчевский, ORCID: 0000-0003-4899-4828 <iliamarchevsky@mail.ru>

<sup>2</sup> В.В. Пузикова, ORCID: 0000-0003-0712-4519 <v.puzikova@yadro.com>

<sup>1</sup> Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, 105005, Россия, г. Москва, ул. 2-я Бауманская, д. 5.

<sup>2</sup> YADRO, 123022, Россия, г. Москва, ул. Рочдельская, д. 15, с. 15.

**Аннотация.** Разработана модификация метода погруженных границ LS-STAG с функциями уровня для моделирования течений неньютоновских вязких жидкостей – жидкостей, для которых вязкость в каждой точке в любой момент времени полностью определяется интенсивностью тензора скоростей деформации. Ранее была разработана модификация данного метода для другого класса неньютоновских жидкостей (вязкоупругих жидкостей), показавшая высокую точность даже для течений, которые характеризуются высокими значениями числа Вайсенберга. Поэтому представляет интерес обобщить метод LS-STAG и для неньютоновских вязких жидкостей. Отметим, что несмотря на то, что метод LS-STAG может успешно применяться для моделирования течений с подвижными погруженными границами, в данной работе внимание сфокусировано только на течениях с неподвижными границами. Построенный численный метод может использоваться как для вязкопластичных жидкостей, так и для обобщенных ньютоновских жидкостей, не обладающих пределом текучести. Для вязкопластичных жидкостей рассмотрены модели Офоли-Моргана-Штеффе, Мизрахи-Берка, Кассо и Гершеля-Балкли, используемые с моделями регуляризации Берковьера-Энгельмана и Папанастасио, а для жидкостей, не обладающих пределом текучести, модели Эллиса, Кросса, Карро, Язуды (Карро-Язуды), а также степенная модель Оствальда-де Веле. Для верификации разработанного и реализованного в авторском программном комплексе численного метода использовалась хорошо исследованная задача об обтекании неподвижного кругового профиля потоком степенной жидкости при различных значениях числа Рейнольдса и индекса течения. Полученные результаты хорошо согласуются с известными в литературе расчетными данными других исследователей. В дальнейшем планируется обобщить разработанную модификацию метода для расчета неньютоновских вязких жидкостей на случай подвижных погруженных границ.

**Ключевые слова:** метод погруженных границ; метод LS-STAG; неньютоновская вязкая жидкость; степенная модель; профиль; функция уровня.

**Для цитирования:** Марчевский И.К., Пузикова В.В. Модификация метода погруженных границ LS-STAG для моделирования течений неньютоновских вязких жидкостей. Труды ИСП РАН, том 37, вып. 1, 2025 г., стр. 217–234. DOI: 10.15514/ISPRAS–2025–37(1)–13.

## The LS-STAG Immersed Boundary Method Modification for Non-Newtonian Viscous Fluids Computation

<sup>1</sup> I. K. Marchevsky, ORCID: 0000-0003-4899-4828 <iliamarchevsky@mail.ru>

<sup>2</sup> V.V. Puzikova, ORCID: 0000-0003-0712-4519 <v.puzikova@yadro.com>

<sup>1</sup> Bauman Moscow State Technical University,

5, 2nd Baumanskaya st., Moscow, 105005, Russia.

<sup>2</sup> YADRO, 15 bld.15, Rochdelskaya st., Moscow, 123022, Russia.

**Abstract.** A modification of the immersed boundary method LS-STAG with level functions has been developed to simulate flows of non-Newtonian viscous fluids. The viscosity of these fluids is completely determined by the intensity of the strain rate tensor at each point at any time. The LS-STAG method modification was previously developed for another class of non-Newtonian fluids (viscoelastic fluids). The modification demonstrated high accuracy even for viscoelastic flows characterized by high values of the Weissenberg number. Therefore, it is of interest to generalize the LS-STAG method for non-Newtonian viscous fluids. Note that although the LS-STAG method can be successfully used to simulate flows with moving immersed boundaries, this paper focuses only on flows with fixed ones. The developed numerical method can be used both for viscoplastic fluids and for generalized Newtonian fluids that do not have a yield point. For viscoplastic fluids, the Ofoli-Morgan-Steffe, Mizrahi-Burk, Casson, and Herschel-Bulkley models used with the Bercovier-Engelmann and Papanastasiou regularization models are considered, and for fluids that do not have a yield point, the Ellis, Cross, Carreau, Yasuda (Carreau-Yasuda) models, as well as the Ostwald-de Waele power model are considered. To verify the numerical method developed and implemented in the author's software package, a well-studied problem of power-law flow past a stationary circular airfoil was used at different values of the Reynolds number and flow index. The obtained results are in good agreement with the known in the literature computational data of other researchers. In the future, it is planned to generalize the developed modification of the LS-STAG method for non-Newtonian viscous fluids simulation for the case of moving immersed boundaries.

**Keywords:** immersed boundary method; the LS-STAG method; non-Newtonian viscous fluid; power-law fluid; airfoil; level-set function.

**For citation:** Marchevsky I.K., Puzikova V.V. The LS-STAG Immersed Boundary Method Modification for Non-Newtonian Viscous Fluids Computation. *Trudy ISP RAN/Proc. ISP RAS*, vol. 37, issue 1, 2025. pp. 217-234 (in Russian). DOI: 10.15514/ISPRAS-2025-37(1)-13.

### 1. Введение

Неньютоновские вязкие жидкости или обобщенные ньютоновские жидкости – жидкости, для которых вязкость  $\nu$  в каждой точке в любой момент времени полностью определяется интенсивностью  $\dot{\gamma}$  тензора скоростей деформации  $\dot{\mathcal{S}}$  в той же точке в тот же самый момент времени, т.е. вязкость  $\nu$  является функцией одной переменной ( $\dot{\gamma}$ ) и явно не зависит от координат и времени действия напряжений (предыстории жидкости). Общим свойством таких жидкостей является близость к реологическому поведению ньютоновских жидкостей при малых значениях  $\dot{\gamma}$ : при этих значениях на графике функции  $\nu(\dot{\gamma})$  наблюдается так называемое ньютоновское плато. Обобщенные ньютоновские жидкости делятся на две группы [1, 2] в зависимости от наличия предела текучести или предельного напряжения сдвига – напряжения, при котором начинает развиваться необратимая пластическая деформация. Это неньютоновские вязкие жидкости, не обладающие пределом текучести, например, нефть, вулканическая лава, грязевые сели, и вязкопластичные жидкости, такие как керамическая паста, шпатлевка, известка.

Поскольку вязкопластичные жидкости обладают пределом текучести  $\tau_0 \neq 0$ , они ведут себя как твердые материалы, а при воздействии проявляют поведение жидкостей. С помощью предела текучести для вязкопластичных сред рассчитываются допустимые напряжения: после прохождения предела текучести в среде начинают происходить необратимые

изменения, сильно изменяется взаимное расположение молекул или частиц среды, появляются значительные пластические деформации. Если среда является металлом, то перестраивается кристаллическая решетка и металл самоупрочняется: после прохождения предела текучести деформации растут при возрастающем значении растягивающей силы.

Отсутствие предела текучести  $\tau_0$  означает, что необратимые деформации наблюдаются при любой нагрузке. Таким образом, для неньютоновских вязких жидкостей, не обладающих пределом текучести, график зависимости напряжений от скоростей деформации проходит через начало координат, т.е. скорости деформации равны нулю, когда напряжения равны нулю. По характеру монотонности функции  $v(\dot{\gamma})$  такие жидкости делятся на две группы: псевдопластичные и дилатантные. В первом случае  $v(\dot{\gamma})$  является убывающей функцией (вязкость снижается при увеличении нагрузки, т.е. происходит разжижение), а во втором – возрастающей (вязкость возрастает при увеличении нагрузки, т.е. происходит загустевание). Для неньютоновских жидкостей возможны только эти два случая, поскольку если при отсутствии предельного напряжения  $\tau_0$  вязкость жидкости одновременно не возрастает и не убывает при всех значениях  $\dot{\gamma}$ , т.е. является константой, то жидкость является ньютоновской. Примерами псевдопластичных жидкостей являются целлюлозные лаки, смазки, нефть, вулканическая лава, грязевые сели, высококонцентрированные растворы полимеров, резины, крахмала, вискоза, латекс, эмульсии, покрытия. К дилатантным жидкостям относятся растворы жидкой глины, песка или бетона, высококонцентрированные суспензии, клеи, покрытия смеси извести с водой, мед, некоторые компоненты леденцов. При малых скоростях жидкость действует как смазка, и дилатантная жидкость течет легко. При более высоких скоростях жидкость уже не успевает заполнить пространство между частицами, и трение значительно увеличивается, вызывая увеличение вязкости. Благодаря описанным свойствам дилатантные жидкости применяют при изготовлении бронезилетов. Такая система обеспечивает владельцу достаточную гибкость для нормального диапазона движения, а также жесткость при попадании пули, колющих ударов ножом, и т.п. Принцип действия такого жилета похож на эффект кольчуги, но бронезилет с дилатантными жидкостями намного легче. Такая жидкость распределяет силу быстрого внезапного удара по более широкой области тела пользователя, снижая травматичность удара. Однако, против медленных, но сильных ударов, при которых дилатантная жидкость имеет низкую вязкость и может течь, такие жидкости дополнительной защиты не обеспечивают.

Целью данной работы является разработка модификации метода погруженных границ [3] с усеченными ячейками и функциями уровня [4] LS-STAG [5] для моделирования течений неньютоновских вязких жидкостей, ее программная реализация и верификация. Характерной особенностью методов погруженных границ является то, что сетка в них не связана с обтекаемым телом, что делает их особенно удобными при моделировании течений в областях со сложной геометрией. Кроме того, данная особенность позволяет производить расчет течений с подвижными границами без перестроения сетки на каждом шаге расчета. Благодаря использованию аппарата функций уровня метод LS-STAG в отличие от других методов погруженных границ позволяет строить дискретные аналоги уравнений единообразно для всех типов ячеек, как полностью заполненных жидкостью или телом, так и усеченных, которые содержат одновременно и жидкость, и твердое тело. Это позволяет не разделять жидкие и твердые ячейки при составлении систем линейных алгебраических уравнений. При этом в двумерном случае шаблон дискретизации имеет пятиточечную структуру. Кроме того, использование функций уровня позволяет легко вычислять все необходимые геометрические характеристики ячеек сетки, в результате чего затраты машинного времени на обработку ячеек сложной формы уменьшаются. В основе построения дискретных аналогов уравнений в методе LS-STAG лежат численные аналоги законов сохранения массы, импульса и кинетической энергии, а на усеченных ячейках корректно учитываются граничные условия, что позволяет получать физически правдоподобное численное решение.

Ранее была разработана модификация метода LS-STAG для другого класса неньютоновских жидкостей – вязкоупругих жидкостей, показавшая высокую точность даже для течений, которые характеризуются высокими значениями числа Вайсенберга [6-8]. Поэтому представляет интерес обобщить метод LS-STAG и для описанных выше неньютоновских вязких жидкостей. Отметим, что несмотря на то, что метод LS-STAG может успешно применяться для моделирования течений с подвижными погруженными границами [9-11], в данной работе внимание сфокусировано только на течениях с неподвижными границами. Для верификации метода используется хорошо исследованная задача об обтекании неподвижного кругового профиля.

## 2. Постановка тестовой задачи

Рассмотрим внешнее обтекание неподвижного кругового профиля с границей  $K$  и диаметром  $D$  (рис. 1) равномерным потоком неньютоновской вязкой жидкости постоянной плотности в расчетной области  $\Omega = [0, 23D] \times [0, 24D]$  с внешней границей  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ .

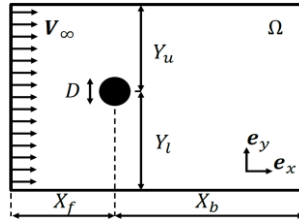


Рис. 1. Расчетная область.  
Fig. 1. Computational domain.

Пусть  $D = 1$ , а центр профиля находится на расстоянии  $X_f = 8$  от левой границы расчетной области, на  $X_b = 15$  – от правой, и на расстоянии  $Y_u = Y_l = 12$  от верхней и нижней границы. В безразмерных переменных математическая постановка задачи имеет вид:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{v} = 0, & \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \nabla p = \nabla \cdot \hat{t}, \\ \vec{v}(x, y, 0) = \vec{v}_0(x, y), & (x, y) \in \Omega, \\ \vec{v}|_{\Gamma_1} = \vec{v}|_{\Gamma_2} = \vec{v}|_{\Gamma_3} = \vec{V}_\infty, & \vec{v}|_K = 0, \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{n}}|_{\Gamma_4} = \vec{0}, \quad \frac{\partial p}{\partial \vec{n}}|_{\Gamma \cup K} = 0. \end{cases}$$

Здесь  $t$  – безразмерное время;  $x, y$  – безразмерные координаты;  $p$  – безразмерное давление;  $\vec{n}$  – внешняя нормаль;  $\vec{v} = u \cdot \vec{e}_x + v \cdot \vec{e}_y$  – безразмерная скорость;  $\hat{t}$  – тензор напряжений

$$\hat{t} = 2\nu(\dot{\gamma})\hat{S};$$

$\hat{S}$  – тензор скоростей деформации

$$\hat{S} = \frac{1}{2}(\nabla \vec{v} + [\nabla \vec{v}]^T) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix};$$

$\dot{\gamma}$  – интенсивность (второй инвариант) тензора скоростей деформации

$$\dot{\gamma} = \sqrt{\frac{1}{2}\hat{S}:\hat{S}} = \sqrt{2 \cdot \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \right\} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2};$$

$\nu(\dot{\gamma})$  – вязкость неньютоновской жидкости, зависящая от интенсивности тензора скоростей деформации. Вид этой зависимости определяется моделью неньютоновской жидкости.

## 2.1. Модели вязких неньютоновских жидкостей

Для вязкопластичных жидкостей с пределом текучести  $\tau_0$  рассмотрим наиболее общую модель – модель Офоли-Моргана-Штеффе [12-14] с регуляризацией:

$$v(\dot{\gamma}) = \left( g_o(\dot{\gamma}, \varepsilon, m) \cdot \sqrt[m]{\frac{\tau_0}{\dot{\gamma}}} + \sqrt[m]{v_0 \dot{\gamma}^{n-1}} \right)^m.$$

Здесь  $m > 0$  – параметр, который определяет плавность перехода от зоны твердого тела к зоне вязкопластичного течения: чем больше значение  $m$ , тем более плавным становится переход;  $n$  – индекс течения, как и в случае неньютоновских вязких жидкостей, не обладающих пределом текучести;  $\varepsilon$  – параметр регуляризации; функция  $g_o(\dot{\gamma}, \varepsilon, m)$  определяется выбранной моделью регуляризации (табл. 1).

Табл. 1. Модели регуляризации для вязкопластичных жидкостей.  
Table 1. Regularization models for viscoplastic fluids.

Модель	$g_o(\dot{\gamma}, \varepsilon, m)$	$g(\dot{\gamma}, \varepsilon)$
Берковьера-Энгельмана [15]	$\sqrt[m]{g(\dot{\gamma}, \varepsilon)}$	$\frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma} + \varepsilon}$ или $\frac{\dot{\gamma}}{\sqrt{\dot{\gamma}^2 + \varepsilon^2}}$
Папанастасио [16]	$g(\sqrt[m]{\dot{\gamma}}, \sqrt[m]{\varepsilon})$	$1 - \exp\left(-\frac{\dot{\gamma}}{\varepsilon}\right)$

Использование модели регуляризации позволяет вычислять компоненты тензора напряжений по единой формуле как для областей вязкопластичного течения, так и для областей твердого тела. При использовании всех моделей регуляризации (табл. 1) имеем:

$$v \rightarrow v_0^e = \left( \sqrt[m]{\frac{\tau_0}{\varepsilon}} + \sqrt[m]{v_0} \right)^m \text{ при } \dot{\gamma} \rightarrow 0.$$

В зависимости от индекса течения модель Офоли-Моргана-Штеффе с регуляризацией может описывать следующие вязкопластичные жидкости:

- разжижающиеся вязкопластичные жидкости (при  $n < 1$ );
- бингамовские вязкопластичные жидкости (при  $n = 1$ );
- загустевающие вязкопластичные жидкости (при  $n > 1$ ).

Отметим, что при  $m = 2$  модель Офоли-Моргана-Штеффе принимает вид модели Мизрахи-Берка [14, 17], если же одновременно имеем  $m = 2$  и  $n = 1$  – модели Кассо [13]. При  $m = 1$  рассматриваемая модель принимает вид модели Гершеля-Балкли [18], а если одновременно имеем  $m = 1$  и  $n = 1$  – модели Бингама [19].

Для неньютоновских вязких жидкостей, не обладающих пределом текучести, зависимости  $v(\dot{\gamma})$  для различных моделей представлены в табл. 2.

## 3. Основные идеи модифицированного метода LS-STAG

### 3.1 Модификация LS-STAG-сетки

В расчетной области  $\Omega$  вводится прямоугольная сетка с ячейками  $\Omega_{i,j} = (x_{i-1}, x_i) \times (y_{j-1}, y_j)$ , площади которых равны  $V_{i,j} = \Delta x_i \Delta y_j$ . Радиусы-векторы центров ячеек сетки будем обозначать  $\vec{x}_{i,j}^c = (x_{i,j}^c, y_{i,j}^c)$ , а границы –  $\Gamma_{i,j}$  (рис. 2). Ячейка  $\Omega_{i,j}$  данной сетки, которая далее будет называться «основной», является контрольным объёмом, который используется для дискретизации уравнения неразрывности и уравнений для нормальных неньютоновских вязкоупругих напряжений.

Табл. 2. Модели неньютоновских вязких жидкостей, не обладающих пределом текучести.  
 Table 2. Models of non-Newtonian viscous fluids that do not have a yield stress.

Модель	$v(\dot{\gamma})$	Псевдопластичные	Дилатантные
Степенная [20] (Оствальда – де Веле)	$v = m\dot{\gamma}^{n-1}$ <p><math>m</math> – мера консистентности (показатель консистентности или консистентность) жидкости; <math>n</math> – индекс течения.</p>	$n < 1$ : модель адекватна для вулканической лавы, грязевых селей ( $n$ от 0,1 до 0,4), нефти ( $n = 0,8$ ).	$n > 1$ : модель адекватна для растворов и сплавов полимеров, суспензий, красок, меда ( $n = 2,5$ ), сыпучих материалов, смеси извести с водой ( $n = 1,47$ ).
Эллиса [21]	$v = \frac{v_0}{1 + \left(\frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_{1/2}}\right)^{\alpha-1}}$ <p><math>\dot{\gamma} \rightarrow \dot{\gamma}_{1/2}</math> при <math>v \rightarrow v_0/2</math>; <math>\alpha = 1/n</math>.</p>	$n < 1$ ; $v \rightarrow v_0$ при $\dot{\gamma} \rightarrow 0$ .	$n > 1$ ; $v \rightarrow v_0$ при $\dot{\gamma} \rightarrow \infty$ .
Кросса [22]	$v = v_\infty + \frac{v_0 - v_\infty}{1 + (\lambda\dot{\gamma})^{1-n}}$ <p><math>\lambda</math> – время релаксации.</p>	$n < 1$ ; $v \rightarrow v_0$ при $\dot{\gamma} \rightarrow 0$ ; $v \rightarrow v_\infty$ при $\dot{\gamma} \rightarrow \infty$ .	$n > 1$ ; $v \rightarrow v_\infty$ при $\dot{\gamma} \rightarrow 0$ ; $v \rightarrow v_0$ при $\dot{\gamma} \rightarrow \infty$ .
Карро [23]	$v = v_\infty + \frac{v_0 - v_\infty}{[1 + (\lambda\dot{\gamma})^2]^{(1-n)/2}}$ <p><math>\lambda</math> – время релаксации.</p>	$n < 1$ ; $v \rightarrow v_0$ при $\dot{\gamma} \rightarrow 0$ ; $v \rightarrow v_\infty$ при $\dot{\gamma} \rightarrow \infty$ .	–

Модель	$v(\dot{\gamma})$	Псевдопластичные	Дилатантные
Язуды [24] (Карро-Язуды)	$v = v_\infty + \frac{v_0 - v_\infty}{[1 + (\lambda\dot{\gamma})^a]^{(1-n)/a}}$ <p><math>a</math> – параметр, характеризующий ширину переходной области между плато на уровне <math>v_0</math> и степенной областью.</p>	$n < 1$ ; $v \rightarrow v_0$ при $\dot{\gamma} \rightarrow 0$ ; $v \rightarrow v_\infty$ при $\dot{\gamma} \rightarrow \infty$ ; при $a = 2$ модель Язуды совпадает с моделью Карро.	–

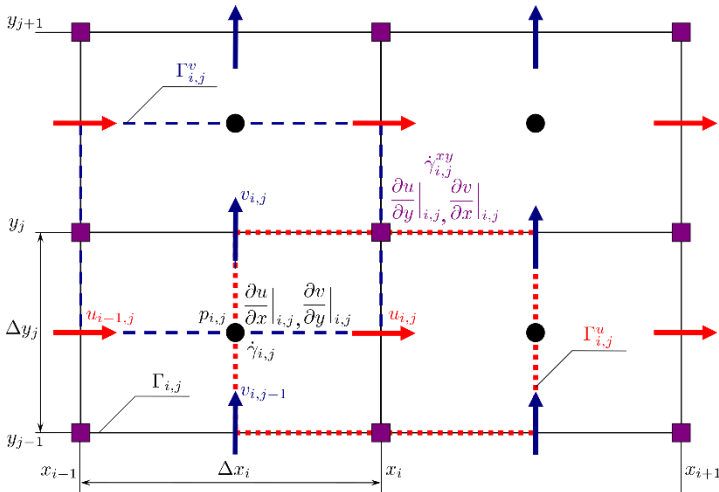


Рис. 2. Разнесенные сетки.  
Fig. 2. Staggered meshes.

Вместе с «основной» строятся смещенные сетки с ячейками  $\Omega_{i,j}^u = (x_i^c, x_{i+1}^c) \times (y_{j-1}, y_j)$  и  $\Omega_{i,j}^v = (x_{i-1}, x_i) \times (y_j^c, y_{j+1}^c)$ , границы которых обозначим  $\Gamma_{i,j}^u$  и  $\Gamma_{i,j}^v$  соответственно (рис. 2). Эти ячейки являются контрольными объемами для уравнения баланса импульса в проекциях на оси  $Ox$  и  $Oy$ . Если  $i = \overline{1, N}$ ,  $j = \overline{1, M}$ , то основная сетка содержит  $G = N \cdot M$  ячеек,  $x$ -сетка –  $G_x = (N - 1) \cdot M$  ячеек, а  $y$ -сетка –  $G_y = N \cdot (M - 1)$ .

Для описания положения границы  $\Gamma^{ib}$  твердого тела произвольной формы  $\Omega^{ib}$  вводят знакопеременную функцию расстояния  $\varphi(\vec{r})$  (функцию уровня), такую что

$$\begin{cases} \varphi(\vec{r}) < 0, & \vec{r} \in \Omega^f \\ \varphi(\vec{r}) = 0, & \vec{r} \in \Gamma^{ib} \\ \varphi(\vec{r}) > 0, & \vec{r} \in \Omega^{ib} \end{cases}$$

В рассматриваемом случае обтекания кругового профиля с центром в точке  $(x_c, y_c)$  функция уровня может быть задана аналитически:

$$\varphi(x, y) = R - \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2}.$$

В каждой усеченной ячейке  $\Omega_{i,j}$  LS-STAG-сетки погруженная граница  $\Gamma_{i,j}^{ib}$  представляется отрезком прямой, положения концов которого определяются линейной интерполяцией величины  $\varphi_{i,j}$ , принимающей значение функции уровня  $\varphi(x_i, y_j)$  в правом верхнем углу ячейки  $\Omega_{i,j}$ . Для определения типа усеченной ячейки вводят коэффициенты заполнения ячеек  $\vartheta_{i,j}^u, \vartheta_{i,j}^v \in [0,1]$ , показывающие, какая часть ячейки занята жидкостью на восточной и северной границах ячейки соответственно.

В двумерном случае все усеченные ячейки можно разделить на три группы: трапециевидные, треугольные и пятиугольные. Примеры всех типов ячеек представлены на рис. 3.

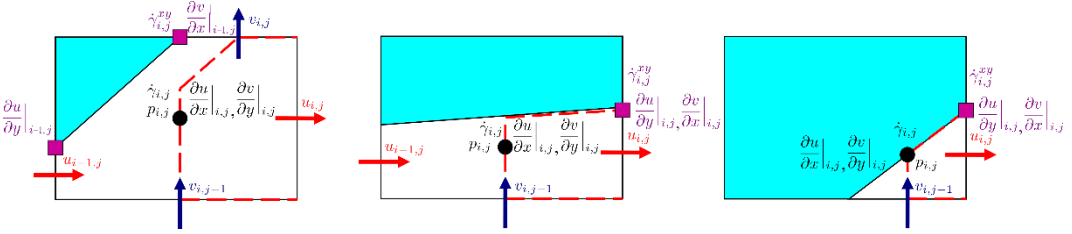


Рис. 3. Положение точек вычисления давления, скорости и напряжений для основных типов усеченных ячеек LS-STAG-сетки: северо-западной треугольной ячейки (слева), северной трапециевидной ячейки (в центре) и северо-западной пятиугольной ячейки (справа).

Fig. 3. Positions of pressure, velocity and stress computation points for the main types of LS-STAG cut-cells: northwest triangular cell (left), north trapezoidal cell (center) and northwest pentagonal cell (right).

Положения точек, в которых вычисляются неизвестные величины, зависят от типа ячейки  $\Omega_{i,j}$  (рис. 2 и 3). Значения скоростей  $u_{i,j}$  и  $v_{i,j}$  вычисляются в серединах жидких частей границ, а давление и нормальные напряжения аппроксимируется кусочно-постоянной функцией на каждой ячейке (для удобства на чертежах привязываем точку вычисления значений  $p_{i,j}, \frac{\partial u}{\partial x}|_{i,j}$  и  $\frac{\partial v}{\partial y}|_{i,j}$  к центру ячейки основной сетки). Точки вычисления касательных напряжений  $\frac{\partial u}{\partial y}|_{i,j}$  и  $\frac{\partial v}{\partial x}|_{i,j}$  зависят от типа ячейки.

Интенсивность тензора скоростей деформации вычисляется как в точках вычисления нормальных напряжений (обозначается  $\dot{\gamma}_{i,j}$ ), так и в точках вычисления касательных напряжений (обозначается  $\dot{\gamma}_{i,j}^{xy}$ ). Каждой ячейке  $\Omega_{i,j}$  основной сетки присвоим вес  $\alpha_{i,j}$ :

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{если } \Omega_{i,j} \text{ — твердая ячейка,} \\ 1/3, & \text{если } \Omega_{i,j} \text{ — треугольная ячейка,} \\ 1/4, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда

$$\dot{\gamma}_{i,j} = \sqrt{2 \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{i,j} \right)^2 \right\} + \alpha_{i,j} (\tau_{i,j}^{s,sqr} + \tau_{i-1,j}^{s,sqr} + \tau_{i,j-1}^{s,sqr} + \tau_{i-1,j-1}^{s,sqr})};$$

$$\dot{\gamma}_{i,j}^{xy} = \sqrt{2 \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{i,j} \right)^2 \right\} + \tau_{i,j}^{s,sqr}}.$$

Здесь  $\tau_{i,j}^{s,sqr} = \left( \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{i,j} + \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{i,j} \right)^2$ ; для величины  $z$ , вычисляемой в центрах ячеек «основной» сетки, значение  $\bar{z}_{i,j}$  определяется следующим образом:



$$\bar{z}_{i,j} = \frac{\alpha_{i,j} V_{i,j} z_{i,j} + \alpha_{i+1,j} V_{i+1,j} z_{i+1,j} + \alpha_{i,j+1} V_{i,j+1} z_{i,j+1} + \alpha_{i+1,j+1} V_{i+1,j+1} z_{i+1,j+1}}{\alpha_{i,j} V_{i,j} + \alpha_{i+1,j} V_{i+1,j} + \alpha_{i,j+1} V_{i,j+1} + \alpha_{i+1,j+1} V_{i+1,j+1}}.$$

Для вычисления компонент тензора скоростей деформации необходимо построить дискретные аналоги нормальных и касательных напряжений. Значения нормальных напряжений  $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j}$  и  $\left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{i,j}$  независимо от типа ячейки  $\Omega_{i,j}$  вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j} &\approx \frac{\vartheta_{i,j}^u u_{i,j} - \vartheta_{i-1,j}^u u_{i-1,j} + (\vartheta_{i-1,j}^u - \vartheta_{i,j}^u) u_{i,j}^{ib}}{V_{i,j} / \Delta y_j}, \\ \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{i,j} &\approx \frac{\vartheta_{i,j}^v v_{i,j} - \vartheta_{i,j-1}^v v_{i,j-1} + (\vartheta_{i,j-1}^v - \vartheta_{i,j}^v) v_{i,j}^{ib}}{V_{i,j} / \Delta x_i}. \end{aligned}$$

Эти формулы верны для усеченных ячеек любого типа, в них естественным образом учитываются граничные условия. Для жидких ячеек они переходят в стандартные конечно-разностные соотношения. Формулы для расчета значений касательных напряжений  $\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i,j}$  и  $\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{i,j}$  зависят от типов ячеек: если одновременно  $\vartheta_{i,j}^u \neq 0$  и  $\vartheta_{i,j+1}^u \neq 0$ , то  $\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i,j}$  вычисляется по формуле

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta y_{i,j}^{xy}},$$

где

$$\Delta y_{i,j}^{xy} = \frac{1}{2} \vartheta_{i,j+1}^u \Delta y_{j+1} + \frac{1}{2} \vartheta_{i,j}^u \Delta y_j,$$

иначе

$$\begin{aligned} \vartheta_{i,j}^u = 0 &\Rightarrow \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i,j} = \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i,j}^{ib,s} = \frac{u_{i,j+1} - u(x_i, y_{i,j+1}^{ib})}{\frac{1}{2} \vartheta_{i,j+1}^u \Delta y_{j+1}}, \\ \vartheta_{i,j+1}^u = 0 &\Rightarrow \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i,j} = \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i,j}^{ib,n} = \frac{u(x_i, y_{i,j}^{ib}) - u_{i,j}}{\frac{1}{2} \vartheta_{i,j}^u \Delta y_j}, \end{aligned}$$

если одновременно  $\vartheta_{i,j}^v \neq 0$  и  $\vartheta_{i+1,j}^v \neq 0$ , то  $\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{i,j}$  вычисляется по формуле

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{\Delta x_{i,j}^{xy}},$$

где

$$\Delta x_{i,j}^{xy} = \frac{1}{2} \vartheta_{i+1,j}^v \Delta x_{i+1} + \frac{1}{2} \vartheta_{i,j}^v \Delta x_i,$$

иначе

$$\begin{aligned} \vartheta_{i,j}^v = 0 &\Rightarrow \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{i,j} = \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{i,j}^{ib,w} = \frac{v_{i+1,j} - v(x_{i+1,j}^{ib}, y_j)}{\frac{1}{2} \vartheta_{i+1,j}^v \Delta x_{i+1}}, \\ \vartheta_{i+1,j}^v = 0 &\Rightarrow \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{i,j} = \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{i,j}^{ib,e} = \frac{v(x_{i,j}^{ib}, y_j) - v_{i,j}}{\frac{1}{2} \vartheta_{i,j}^v \Delta x_i}. \end{aligned}$$

### 3.2. Особенности построения дискретных аналогов уравнений неразрывности и баланса импульса

В данной работе рассматривается только случай неподвижных погруженных границ. Пусть  $\Omega^*$  – некоторая область,  $\Gamma^*$  – ее граница. Тогда уравнение неразрывности и уравнение баланса импульса в проекциях на оси  $Ox$  и  $Oy$  соответственно с учетом формул для тензоров напряжений и скоростей деформации можно переписать в интегральной форме:

$$\int_{\Gamma^*} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega^*} u \, dV + \int_{\Gamma^*} (\vec{v} \cdot \vec{n}) u \, dS + \int_{\Gamma^*} p \vec{e}_x \cdot \vec{n} \, dS - \boxed{\int_{\Gamma^*} v(\dot{\gamma}) \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{e}_y \right] \cdot \vec{n} \, dS} - \boxed{\int_{\Gamma^*} v(\dot{\gamma}) \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial v}{\partial x} \vec{e}_y \right] \cdot \vec{n} \, dS} = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega^*} v \, dV + \int_{\Gamma^*} (\vec{v} \cdot \vec{n}) v \, dS + \int_{\Gamma^*} p \vec{e}_y \cdot \vec{n} \, dS - \boxed{\int_{\Gamma^*} v(\dot{\gamma}) \left[ \frac{\partial v}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial v}{\partial y} \vec{e}_y \right] \cdot \vec{n} \, dS} - \boxed{\int_{\Gamma^*} v(\dot{\gamma}) \left[ \frac{\partial u}{\partial y} \vec{e}_x + \frac{\partial v}{\partial y} \vec{e}_y \right] \cdot \vec{n} \, dS} = 0.$$

Отличие от аналогичных уравнений для ньютоновской жидкости заключается в обведенных рамками членах, описывающих вязкую диффузию. При построении разностных аналогов для получения независимых систем линейных алгебраических уравнений для  $u$  и  $v$  необходимо сделать различие между членами, обведенными в уравнениях выше одинарными и двойными рамками: значения всех переменных, которые входят в слагаемые, обведенные одинарными рамками, необходимо брать с предыдущего шага по времени, а в слагаемые, обведенные двойными рамками, будут входить неизвестные значения  $u$  и  $v$ . Тогда для уравнений баланса импульса дискретизированная по пространству разностная схема будет иметь следующий матричный вид:

$$\frac{d}{dt} (M^x u) + C^x[\bar{u}]u + G^x P - K^{\tau,x} u + S_x^{ib,c} - S_{\tau,x}^{ib,v} - F_u^d = 0,$$

$$\frac{d}{dt} (M^y v) + C^y[\bar{v}]v + G^y P - K^{\tau,y} v + S_y^{ib,c} - S_{\tau,y}^{ib,v} - F_v^d = 0.$$

Здесь  $P \in \mathbb{R}^G$  – дискретный аналог давления;  $u \in \mathbb{R}^{G_x}$  – дискретный аналог проекции скорости на ось  $Ox$ ;  $v \in \mathbb{R}^{G_y}$  – дискретный аналог проекции скорости на ось  $Oy$ ; элементы диагональных матриц  $M^x \in M(\mathbb{R})_{G_x \times G_x}$  и  $M^y \in M(\mathbb{R})_{G_y \times G_y}$  являются объемами ячеек  $\Omega_{i,j}^u$  и  $\Omega_{i,j}^v$  соответственно;  $C^x[\bar{u}] \in M(\mathbb{R})_{G_x \times G_x}$  и  $C^y[\bar{v}] \in M(\mathbb{R})_{G_y \times G_y}$  задают дискретные аналоги конвективных потоков,  $G^x \in M(\mathbb{R})_{G_x \times G}$  и  $G^y \in M(\mathbb{R})_{G_y \times G}$  – градиента давления; матрицы  $K^{\tau,x} \in M(\mathbb{R})_{G_x \times G_x}$  и  $K^{\tau,y} \in M(\mathbb{R})_{G_y \times G_y}$  возникают из дискретных аналогов членов, отвечающих за вязкую диффузию и обведенных в уравнениях выше двойными рамками;  $S_x^{ib,c} \in \mathbb{R}^{G_x}$  и  $S_y^{ib,c} \in \mathbb{R}^{G_y}$  – источниковые члены, возникающие в силу граничных условий из конвективных членов;  $S_{\tau,x}^{ib,v} \in \mathbb{R}^{G_x}$  и  $S_{\tau,y}^{ib,v} \in \mathbb{R}^{G_y}$  – источниковые члены, возникающие в силу граничных условий из вязких членов, обведенных в уравнениях выше двойными рамками;  $F_u^d \in \mathbb{R}^{G_x}$  и  $F_v^d \in \mathbb{R}^{G_y}$  – дискретные аналоги вязких членов, обведенных в уравнениях выше одинарными рамками. Дискретный аналог уравнения неразрывности в матричной форме, как и в случае ньютоновской жидкости, имеет вид

$$D^x u + D^y v + \bar{U}^{ib} = 0.$$

Здесь  $D^x = -(G^x)^T \in M(\mathbb{R})_{G \times G_x}$ ;  $D^y = -(G^y)^T \in M(\mathbb{R})_{G \times G_y}$ ;  $\bar{U}^{ib} \in \mathbb{R}^G$  – источниковый член, возникающий в силу граничных условий.

Формулы для вычисления элементов матриц  $M^x$ ,  $M^y$ ,  $C^x[\bar{u}]$ ,  $C^y[\bar{v}]$ ,  $D^x$ ,  $D^y$  и векторов  $S_x^{ib,c}$ ,  $S_y^{ib,c}$ ,  $\bar{U}^{ib}$  совпадают с аналогичными для случая ньютоновской жидкости и могут быть взяты из [5]. Таким образом, для случая неньютоновских вязких жидкостей необходимо вывести только формулы для вычисления элементов матриц  $K^{\tau,x}$ ,  $K^{\tau,y}$  и векторов  $S_{\tau,x}^{ib,v}$ ,  $S_{\tau,y}^{ib,v}$ ,  $F_u^d$ ,  $F_v^d$ .

С учетом представленных выше формул для напряжений, элементы векторов  $F_u^d$  и  $F_v^d$  можно вычислять по формулам, единым для всех типов ячеек LS-STAG-сетки:

$$\begin{aligned} F_u^d|_{i,j} &= \left[ v(\dot{\gamma}_{i+1,j}) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i+1,j} - v(\dot{\gamma}_{i,j}) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} \right] \vartheta_{i,j}^u \Delta y_j + \\ &+ v(\dot{\gamma}_{i,j}^{xy}) \Delta x_{i,j}^{xy} \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{i,j} - v(\dot{\gamma}_{i,j-1}^{xy}) \Delta x_{i,j-1}^{xy} \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{i,j-1}, \\ F_v^d|_{i,j} &= \left[ v(\dot{\gamma}_{i,j+1}) \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{i,j+1} - v(\dot{\gamma}_{i,j}) \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{i,j} \right] \vartheta_{i,j}^v \Delta x_i + \\ &+ v(\dot{\gamma}_{i,j}^{xy}) \Delta y_{i,j}^{xy} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{i,j} - v(\dot{\gamma}_{i-1,j}^{xy}) \Delta y_{i-1,j}^{xy} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{i-1,j}. \end{aligned}$$

Аналогично получаем дискретные аналоги членов из уравнения баланса импульса, обведенных двойными рамками:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{i,j}^u} v(\dot{\gamma}) \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{e}_y \right] \cdot \vec{n} \, dS &\approx \left[ v(\dot{\gamma}_{i+1,j}) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i+1,j} - v(\dot{\gamma}_{i,j}) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} \right] \vartheta_{i,j}^u \Delta y_j + \\ &+ v(\dot{\gamma}_{i,j}^{xy}) \Delta x_{i,j}^{xy} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{i,j} - v(\dot{\gamma}_{i,j-1}^{xy}) \Delta x_{i,j-1}^{xy} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{i,j-1}, \\ \int_{\Gamma_{i,j}^v} v(\dot{\gamma}) \left[ \frac{\partial v}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial v}{\partial y} \vec{e}_y \right] \cdot \vec{n} \, dS &\approx \left[ v(\dot{\gamma}_{i,j+1}) \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{i,j+1} - v(\dot{\gamma}_{i,j}) \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{i,j} \right] \vartheta_{i,j}^v \Delta x_i + \\ &+ v(\dot{\gamma}_{i,j}^{xy}) \Delta y_{i,j}^{xy} \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{i,j} - v(\dot{\gamma}_{i-1,j}^{xy}) \Delta y_{i-1,j}^{xy} \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{i-1,j}. \end{aligned}$$

Поставим в формулы для элементов векторов  $F_u^d$  и  $F_v^d$  формулы выражения для напряжений. Тогда получим, что дискретизация членов из уравнения баланса импульса, обведенных двойными рамками, записывается на пятиточечном шаблоне следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{i,j}^u} v(\dot{\gamma}) \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{e}_y \right] \cdot \vec{n} \, dS &\approx K_W^{\tau,x}(i,j) u_{i-1,j} + K_E^{\tau,x}(i,j) u_{i+1,j} + K_P^{\tau,x}(i,j) u_{i,j} + \\ &+ K_S^{\tau,x}(i,j) u_{i,j-1} + K_N^{\tau,x}(i,j) u_{i,j+1} + S_{\tau,x|i,j}^{ib,v}, \\ K_P^{\tau,x}(i,j) &= -\frac{v(\dot{\gamma}_{i,j})(\vartheta_{i,j}^u \Delta y_j)^2}{V_{i,j}} - \frac{v(\dot{\gamma}_{i+1,j})(\vartheta_{i,j}^u \Delta y_j)^2}{V_{i+1,j}} - K_S^{\tau,x}(i,j) - K_N^{\tau,x}(i,j), \quad K_N^{\tau,x}(i,j) = \frac{v(\dot{\gamma}_{i,j}^{xy}) \Delta x_{i,j}^{xy}}{\Delta y_{i,j}^{xy}}, \\ K_E^{\tau,x}(i,j) &= \frac{v(\dot{\gamma}_{i+1,j}) \vartheta_{i,j}^u \vartheta_{i+1,j}^u (\Delta y_j)^2}{V_{i+1,j}}, \quad K_S^{\tau,x}(i,j) = K_N^{\tau,x}(i,j-1), \quad K_W^{\tau,x}(i,j) = K_E^{\tau,x}(i-1,j), \\ S_{\tau,x|i,j}^{ib,v} &= \vartheta_{i,j}^u (\Delta y_j)^2 \left( \frac{v(\dot{\gamma}_{i+1,j})(\vartheta_{i,j}^u - \vartheta_{i+1,j}^u)}{V_{i+1,j}} u_{i+1,j}^{ib} - \frac{v(\dot{\gamma}_{i,j})(\vartheta_{i-1,j}^u - \vartheta_{i,j}^u)}{V_{i,j}} u_{i,j}^{ib} \right), \quad i = \overline{2, N-2}, \quad j = \overline{2, M-1}; \end{aligned}$$

$$\int_{\Gamma_{i,j}^v} v(\dot{\gamma}) \left[ \frac{\partial v}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial v}{\partial y} \vec{e}_y \right] \cdot \vec{n} dS \approx K_W^{\tau,y}(i,j)v_{i-1,j} + K_E^{\tau,y}(i,j)v_{i+1,j} + K_P^{\tau,y}(i,j)v_{i,j} +$$

$$+ K_S^{\tau,y}(i,j)v_{i,j-1} + K_N^{\tau,y}(i,j)v_{i,j+1} + S_{\tau,y|i,j}^{ib,v},$$

$$K_P^{\tau,y}(i,j) = -\frac{v(\dot{\gamma}_{i,j})(\vartheta_{i,j}^v \Delta x_i)^2}{V_{i,j}} - \frac{v(\dot{\gamma}_{i,j+1})(\vartheta_{i,j}^v \Delta x_i)^2}{V_{i,j+1}} - K_W^{\tau,y}(i,j) - K_E^{\tau,y}(i,j), \quad K_E^{\tau,y}(i,j) = \frac{v(\dot{\gamma}_{i,j}^{xy}) \Delta y_{i,j}^{xy}}{\Delta x_{i,j}^{xy}},$$

$$K_N^{\tau,y}(i,j) = \frac{v(\dot{\gamma}_{i,j+1}) \vartheta_{i,j}^v \vartheta_{i,j+1}^v (\Delta x_i)^2}{V_{i,j+1}}, \quad K_S^{\tau,y}(i,j) = K_N^{\tau,y}(i,j-1), \quad K_W^{\tau,y}(i,j) = K_E^{\tau,y}(i-1,j),$$

$$S_{\tau,y|i,j}^{ib,v} = \vartheta_{i,j}^v (\Delta x_i)^2 \left( \frac{v(\dot{\gamma}_{i,j+1}) (\vartheta_{i,j}^v - \vartheta_{i,j+1}^v)}{V_{i,j+1}} v_{i,j+1}^{ib} - \frac{v(\dot{\gamma}_{i,j}) (\vartheta_{i,j-1}^v - \vartheta_{i,j}^v)}{V_{i,j}} v_{i,j}^{ib} \right), \quad i = \overline{2, N-1}, \quad j = \overline{2, M-2}.$$

Отметим, что для элементов матриц используются следующие обозначения: в строке соответствующей ячейке с номером  $(i, j)$  элемент с индексом  $P$  стоит на диагонали, элемент с индексом  $W$  находится в столбце с номером контрольного объема, граничащего с  $\Omega_{i,j}$  с запада, и т. д.

Вблизи погруженных границ эти формулы необходимо модифицировать по аналогии со случаем ньютоновской жидкости, описанным в [5]. Перечислим все изменения в формулах.

При  $\vartheta_{i,j+1}^u = 0$  из  $K_P^{\tau,x}(i,j)$  нужно вычесть  $\frac{s_{i,j}^{ib,\tau,x}}{\vartheta_{i,j}^u \Delta y_j}$ , а к  $S_{\tau,x}^{ib,v}|_{i,j}$  – прибавить  $\frac{s_{i,j}^{ib,\tau,x} u(x_{i,y|j}^{ib})}{\vartheta_{i,j}^u \Delta y_j}$ , где  $s_{i,j}^{ib,\tau,x} = 2v(\dot{\gamma}_{i,j}^{xy})(\Delta x_{i,j}^{ib,e} + \Delta x_{i+1,j}^{ib,w})$ . Аналогично при  $\vartheta_{i,j-1}^u = 0$  из  $K_P^{\tau,x}(i,j)$  нужно вычесть  $\frac{s_{i,j-1}^{ib,\tau,x}}{\vartheta_{i,j-1}^u \Delta y_j}$ , к  $S_{\tau,x}^{ib,v}|_{i,j}$  – прибавить  $\frac{s_{i,j-1}^{ib,\tau,x} u(x_{i,y|j}^{ib})}{\vartheta_{i,j-1}^u \Delta y_j}$ ; при  $\vartheta_{i+1,j}^v = 0$  из  $K_P^{\tau,y}(i,j)$  нужно вычесть  $\frac{s_{i,j}^{ib,\tau,y}}{\vartheta_{i,j}^v \Delta x_i}$ , где  $s_{i,j}^{ib,\tau,y} = 2v(\dot{\gamma}_{i,j}^{xy})(\Delta y_{i,j}^{ib,n} + \Delta y_{i,j+1}^{ib,s})$ , при этом к  $S_{\tau,y}^{ib,v}|_{i,j}$  нужно прибавить  $\frac{s_{i,j}^{ib,\tau,y} v(x_{i,j,y}^{ib})}{\vartheta_{i,j}^v \Delta x_i}$ ;

соответственно при  $\vartheta_{i-1,j}^v = 0$  из  $K_P^{\tau,y}(i,j)$  нужно вычесть  $\frac{s_{i-1,j}^{ib,\tau,y}}{\vartheta_{i,j}^v \Delta x_i}$ , а к  $S_{\tau,y}^{ib,v}|_{i,j}$  – прибавить  $\frac{s_{i-1,j}^{ib,\tau,y} v(x_{i,j,y}^{ib})}{\vartheta_{i,j}^v \Delta x_i}$ . Тогда в силу граничных условий в  $S_{\tau,x}^{ib,v}$  ненулевые элементы будут только на

границах  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ :  $S_{\tau,x}^{ib,v}|_{i,1} = \frac{v(\dot{\gamma}_{i,0}^{xy}) V_{\infty}(\Delta x_i + \Delta x_{i+1})}{\vartheta_{i,1}^u \Delta y_1}$ ,  $S_{\tau,x}^{ib,v}|_{i,M} = \frac{v(\dot{\gamma}_{i,M}^{xy}) V_{\infty}(\Delta x_i + \Delta x_{i+1})}{\vartheta_{i,M}^u \Delta y_M}$ ,  $i = \overline{2, N-2}$ ;

$S_{\tau,x}^{ib,v}|_{1,j} = \frac{v(\dot{\gamma}_{1,j}) V_{\infty}(\vartheta_{1,j}^u \Delta y_j)^2}{V_{1,j}}$  при  $j = \overline{2, M-1}$ ;  $S_{\tau,x}^{ib,v}|_{1,1} = \frac{v(\dot{\gamma}_{1,1}) V_{\infty}(\vartheta_{1,1}^u \Delta y_1)^2}{V_{1,1}} + \frac{v(\dot{\gamma}_{1,0}^{xy}) V_{\infty}(\Delta x_1 + \Delta x_2)}{\vartheta_{1,1}^u \Delta y_1}$ ;

$S_{\tau,x}^{ib,v}|_{1,M} = \frac{v(\dot{\gamma}_{1,M}) V_{\infty}(\vartheta_{1,M}^u \Delta y_M)^2}{V_{1,M}} + \frac{v(\dot{\gamma}_{1,M}^{xy}) V_{\infty}(\Delta x_1 + \Delta x_2)}{\vartheta_{1,M}^u \Delta y_M}$ , кроме того на  $\Gamma_4$  из  $K_P^{\tau,y}(N,j)$  не нужно

вычитать  $s_{N,j}^{ib,\tau,y}$ , к  $K_P^{\tau,x}(N-1,j)$  надо добавить  $\frac{v(\dot{\gamma}_{N,j}) (\vartheta_{N-1,j}^u \Delta y_j)^2}{V_{N,j}}$ . Значения  $\Delta x_{i,j}^{ib,e}$ ,  $\Delta x_{i+1,j}^{ib,w}$ ,  $\Delta y_{i,j}^{ib,n}$ ,  $\Delta y_{i,j+1}^{ib,s}$  зависят от типа усеченной ячейки.

Формулы для вычисления компонент гидродинамической силы  $\vec{F} = (F_{xa}, F_{ya})$  строятся по аналогии с представленными в [5] для случая ньютоновской жидкости с той лишь разницей, что вместо постоянной вязкости  $\nu$  в них используется  $v(\dot{\gamma})$ :

$$F_{xa}^h = \sum_{\text{Cut-cells } \Omega_{i,j}^{ib}} (\vartheta_{i-1,j}^u - \vartheta_{i,j}^u) \Delta y_j \left( p_{i,j} - v(\dot{\gamma}_{i,j}) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} \right) - v(\dot{\gamma}_{i,j}) \text{Quad}_{i,j}^{ib} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \vec{e}_y \cdot \vec{n} \right),$$

$$F_{ya}^h = \sum_{\text{Cut-cells } \Omega_{i,j}^{ib}} -v(\dot{\gamma}_{i,j}) \text{Quad}_{i,j}^{ib} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \vec{e}_x \cdot \vec{n} \right) + (\vartheta_{i,j-1}^v - \vartheta_{i,j}^v) \Delta x_i \left( p_{i,j} - v(\dot{\gamma}_{i,j}) \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{i,j} \right).$$

В данных выражениях квадратуры от давления и нормальных напряжений вычислены по формуле прямоугольников с учетом того, что эти слагаемые являются константами на усеченных ячейках; в результате одна и та же формула оказывается верной для всех типов усеченных ячеек. Наоборот, квадратуры от касательных напряжений, обозначенные как  $Quad_{i,j}^{ib}$ , зависят от типа усеченной ячейки и вычисляются по формуле трапеций. Формулы для расчета  $Quad_{i,j}^{ib}$  представлены в [5].

Интегрирование по времени получающейся после LS-STAG-дискретизации по пространству дифференциально-алгебраической системы производится при помощи метода, основанного на схеме предиктор-корректор первого порядка. Этот метод состоит из двух шагов.

Шаг предиктора приводит к решению независимых разностных аналогов уравнений Гельмгольца для прогнозов скоростей  $\tilde{u}$  и  $\tilde{v}$  в момент времени  $t_{n+1} = (n + 1)\Delta t$ :

$$\frac{M^x(\tilde{u} - u^n)}{\Delta t} + C^x[\bar{u}^n]u^n + S_x^{ib,c,n} - (D^x)^T P^n - K^{\tau,x}\tilde{u} - S_{\tau,x}^{ib,v} - F_u^{d,n} = 0,$$

$$\frac{M^y(\tilde{v} - v^n)}{\Delta t} + C^y[\bar{v}^n]v^n + S_y^{ib,c,n} - (D^y)^T P^n - K^{\tau,y}\tilde{v} - S_{\tau,y}^{ib,v} - F_v^{d,n} = 0.$$

Здесь  $P^n$  – вектор с компонентами  $p_{i,j}^n$ ;  $u^n$  и  $v^n$  – векторы, компонентами которых являются значения скоростей  $u_{i,j}^n$  и  $v_{i,j}^n$  соответственно. Подчеркнем, что элементы матриц  $K^{\tau,x}$  и  $K^{\tau,y}$  зависят от шага по времени: при вычислении  $v(\dot{\gamma})$  используются значения  $\dot{\gamma}$  с  $n$ -го шага по времени. Таким образом, системы с шага предиктора являются линейными.

Шаг корректора приводит к решению разностного аналога уравнения Пуассона для функции давления  $\Phi = \Delta t(P^{n+1} - P^n)$ :

$$A\Phi = D^x\tilde{u} + D^y\tilde{v} + \bar{U}^{ib,n+1}.$$

Здесь  $A = -D^x(M^x)^{-1}(D^x)^T - D^y(M^y)^{-1}(D^y)^T$ ,  $A \in M(\mathbb{R})_{G \times G}$ .

Затем определяются скорости и давление в момент времени  $t_{n+1}$ :

$$u^{n+1} = \tilde{u} + (M^x)^{-1}(D^x)^T \Phi, \quad v^{n+1} = \tilde{v} + (M^y)^{-1}(D^y)^T \Phi, \quad P^{n+1} = P^n + (\Phi/\Delta t).$$

#### 4. Вычислительные эксперименты

Рассматривается степенная жидкость [20], поскольку для этого случая в литературе можно найти данные расчетов других исследователей для верификации результатов [25-27]. Для степенной жидкости зависимость вязкости от интенсивности тензора скоростей деформации имеет вид

$$\nu = m\dot{\gamma}^{n-1}.$$

Мера консистентности  $m$  в данном случае выражается через характерные параметры течения следующим образом:

$$m = \frac{\rho V_\infty^{2-n} D^n}{\text{Re}}$$

При проведении расчетов безразмерные стационарные аэродинамические коэффициенты лобового сопротивления  $C_{xa}$  и подъемной силы  $C_{ya}$  получаются осреднением по большому промежутку времени нестационарных нагрузок:

$$C_{xa}(t) = \frac{2F_{xa}}{\rho V_\infty^2 D}, \quad C_{ya}(t) = \frac{2F_{ya}}{\rho V_\infty^2 D}.$$

Здесь аэродинамические силы  $F_{xa}$  и  $F_{ya}$  вычисляются по формулам, полученным в предыдущем разделе.

Расчеты проводились при значениях числа Рейнольдса  $\text{Re} < 50$  на неравномерной прямоугольной сетке  $120 \times 148$  с шагом по времени  $\Delta t = 0,01$ . В окрестности погруженной

границы используется блок равномерной сетки с шагом  $h = D/16$ . Индекс течения  $n$  изменялся в диапазоне от 0,2 до 1,4.

На рис. 4 представлены картины обтекания кругового профиля потоком рассматриваемой степенной жидкости при  $Re = 40$  и различных значениях индекса течения. Видно, что длина зоны возвратного течения за круговым профилем увеличивается вместе с ростом значения индекса течения  $n$ , что согласуется с выводами исследований [25-27].

Сравнение значений безразмерного стационарного аэродинамического коэффициента лобового сопротивления  $C_{xa}$ , рассчитанных в случае обтекания неподвижного профиля при  $Re = \{0,1; 1; 10; 40\}$ , с результатами работ [25-27] представлено в табл. 3 и 4. При всех рассматриваемых значениях числа Рейнольдса  $Re$  и индекса течения  $n$  относительная погрешность при сравнении рассчитанных значений  $C_{xa}$  с расчетами других исследователей не превосходит 10 %.

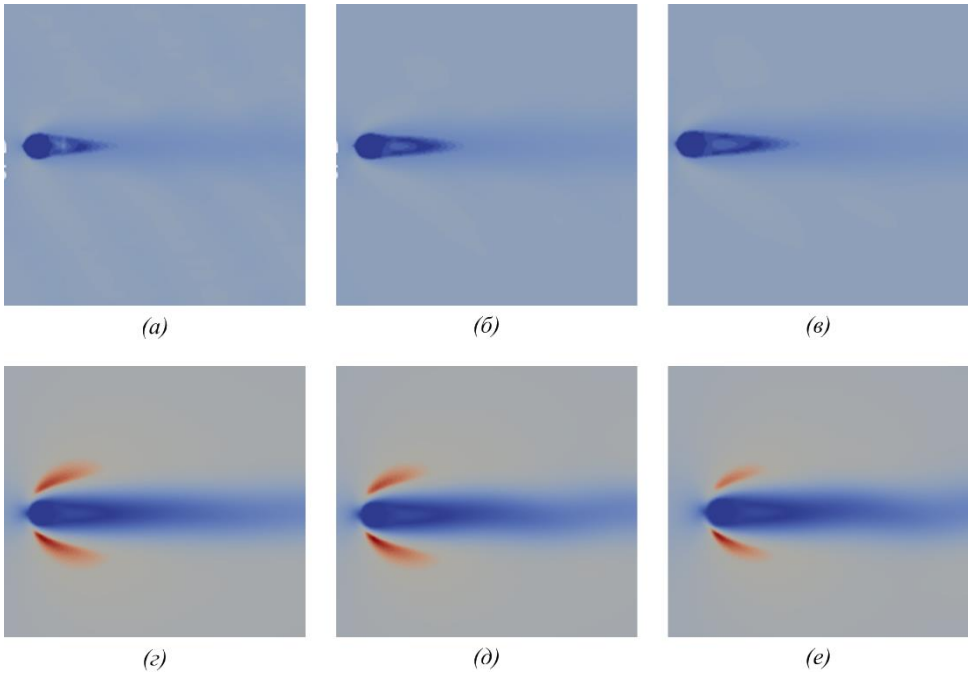


Рис. 4. Картины обтекания кругового профиля потоком степенной жидкости при  $Re = 40$ : (а)  $n = 0,4$ ; (б)  $n = 0,6$ ; (в)  $n = 0,8$ ; (г)  $n = 1,0$ ; (д)  $n = 1,2$ ; (е)  $n = 1,4$ .

Fig. 4. Power-law flow past circular airfoil at  $Re = 40$ : (a)  $n = 0,4$ ; (б)  $n = 0,6$ ; (в)  $n = 0,8$ ; (г)  $n = 1,0$ ; (д)  $n = 1,2$ ; (е)  $n = 1,4$ .

Табл. 3. Сравнение значений  $C_{xa}$ , рассчитанных при  $Re > 15$ , с результатами работ [25-27].  
Table 3. Comparison of computed values of  $C_{xa}$  with the results of studies [25-27] at  $Re > 15$ .

Re	20					40						
	n	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,4
Данная работа	1,88	1,89	1,90	1,92	1,94	1,11	1,25	1,35	1,37	1,45	1,50	
Расчет [25]	1,97	2,04	2,01	2,03	2,05	–	–	–	–	–	–	–
Расчет [26]	1,96	1,99	2,05	–	2,10	–	–	1,28	1,42	1,53	1,54	–
Расчет [27]	–	–	–	–	–	1,14	1,24	1,35	1,44	1,51	–	–

Табл. 4. Сравнение значений  $C_{xa}$ , рассчитанных при  $Re < 15$ , с результатами работы [27].  
Table 4. Comparison of computed values of  $C_{xa}$  with the results of study [27] at  $Re < 15$ .

$n$		0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
Re = 0,1	Данная работа	260,82	220,94	160,56	90,82	59,10
	Расчет [27]	270,54	231,32	164,25	100,85	61,13
Re = 1	Данная работа	25,45	21,31	16,83	12,41	11,10
	Расчет [27]	27,06	23,31	17,47	13,25	10,57
Re = 10	Данная работа	2,99	2,98	2,93	2,87	2,73
	Расчет [27]	3,16	3,03	2,93	2,86	2,80

## 5. Заключение

Разработана модификация метода погруженных границ LS-STAG для моделирования течений неньютоновских вязких жидкостей. Построенный численный метод может использоваться как для вязкопластичных жидкостей, так и для обобщенных ньютоновских жидкостей, не обладающих пределом текучести. Для вязкопластичных жидкостей рассмотрены модели Офоли-Моргана-Штеффе, Мизрахи-Берка, Кассо и Гершеля-Балкли, используемые с моделями регуляризации Берковьера-Энгельмана и Папанастасио, а для жидкостей, не обладающих пределом текучести, модели Эллиса, Кросса, Карро, Язуды (Карро-Язуды), а также степенная модель Оствальда-де Веле. Для верификации разработанного и реализованного в авторском программном комплексе [28] численного метода использовалась хорошо исследованная задача об обтекании неподвижного кругового профиля потоком степенной жидкости при различных значениях числа Рейнольдса и индекса течения. Полученные результаты хорошо согласуются с известными в литературе расчетными данными других исследователей. В дальнейшем планируется обобщить разработанную модификацию метода для расчета неньютоновских вязких жидкостей на случай подвижных погруженных границ.

## Список литературы / References

- [1]. Bird R.B., Armstrong R.C., Hassager O. Dynamics of polymeric liquids. V.1. Fluid mechanics. John Wiley & Sons, 1987. 649 p.
- [2]. Owens R.G., Phillips T.N. Computational Rheology. Imperial College Press, 2002. 417 p.
- [3]. Mittal R., Iaccarino G. Immersed boundary methods. Annu. Rev. Fluid Mech, 2005, vol. 37, pp. 239–261. DOI: 10.1146/annurev.fluid.37.061903.175743
- [4]. Osher S. J., Fedkiw R. Level set methods and dynamic implicit surfaces. Springer, 2003. 286 p.
- [5]. Cheny Y., Botella O. The LS-STAG method: A new immersed boundary/level-set method for the computation of incompressible viscous flows in complex moving geometries with good conservation properties. J. Comput. Phys., 2010, vol. 229, pp. 1043-1076. DOI: 10.1016/j.jcp.2009.10.007
- [6]. Marchevsky I.K., Puzikova V.V. The modified LS-STAG method application for planar viscoelastic flow computation in a 4:1 contraction channel. Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Natural Sciences, 2021, № 3, pp. 46-63. DOI: 10.18698/1812-3368-2021-3-46-63
- [7]. Puzikova V.V. Simulation of viscoelastic flow past circular airfoil by using the modified LS-STAG immersed boundary method. J. Phys.: Conf. Ser. 2019. Vol. 1348, № 1. P. 1-8. DOI: 10.1088/1742-6596/1348/1/012093
- [8]. Пузикова В.В. Модификация метода погруженных границ LS-STAG для моделирования течений вязкоупругих жидкостей. Труды ИСП РАН, том 29, вып. 1, 2017 г., стр. 71-84. / Puzikova V. The LS-STAG Immersed Boundary Method Modification for Viscoelastic Flow Computations. Trudy ISP RAN/Proc. ISP RAS, vol. 29, issue 1, 2017, pp. 71-84 (in Russian). DOI: 10.15514/ISPRAS-2017-29(1)- 5

- [9]. Kraposhin M., Kuzmina K., Marchevsky I., Puzikova V. Study of OpenFOAM® efficiency for solving Fluid–Structure Interaction problems. *OpenFOAM®: Selected papers of the 11th Workshop*. 2019. P. 465 - 479.
- [10]. Marchevsky I.K., Puzikova V.V. Numerical simulation in coupled hydroelastic problems by using the LS-STAG immersed boundary method. In: Gutschmidt S., Hewett J., Sellier M. (eds) *IUTAM Symposium on Recent Advances in Moving Boundary Problems in Mechanics*. IUTAM Bookseries, vol 34. Springer, Cham. 2019. P. 133-145. DOI: 10.1007/978-3-030-13720-5\_12
- [11]. Marchevsky I.K., Puzikova V.V. Numerical simulation of wind turbine rotors autorotation by using the modified LS-STAG immersed boundary method. *International Journal of Rotating Machinery*. 2017. V. 2017. P. 1-7. DOI: 10.1155/2017/6418108
- [12]. Ofoli R.Y., Morgan R.G., Steffe J.F. A generalized rheological model for inelastic fluid foods. *J. Texture Studies*. 1987. Vol. 18, pp. 213-230.
- [13]. Mitsoulis E. Flows of viscoplastic materials: models and computations. *Rheology Reviews*. 2007, pp. 135 - 178.
- [14]. Rao M.A. *Rheology of Fluid and Semisolid Foods: Principles and Applications*. Springer, 2007. 433 p.
- [15]. Bercovier M., Engelman M., A finite-element method for incompressible non-Newtonian flows. *J. Comput. Phys*. 1980. Vol. 36, pp. 313-326.
- [16]. Papanastasiou T.C. Flow of materials with yield. *J. Rheol.* 1987. Vol. 31, pp. 385-404.
- [17]. Mizrahi S., Berk S. Flow behavior of concentrated orange juice: mathematical treatment. *J. Texture Studies*. 1972. Vol. 3, pp. 69-79.
- [18]. Herschel W.H., Bulkley R. Konsistenzmessungen von Gummi-Benzol-Lösungen. *Kolloid Z.* 1926. Vol. 39, pp. 291-300.
- [19]. Bingham E.C. *Fluidity and Plasticity*. N.-Y.: McGraw-Hill, 1922. 440 p.
- [20]. de Waele A. Viscometry and plastometry // *Oil Color Chem. Assoc. J.* 1923. Vol. 6, pp. 33-69.
- [21]. Barnes H.A., Hutton J.E., Walters K. *An introduction to rheology*. Elsevier, 1993. 199 p.
- [22]. Cross M. Rheology of non-Newtonian fluids: a new flow equation for pseudo-plastic systems. *J. Colloid*. 1958. Vol. 20, pp. 417-437.
- [23]. Carreau P. Rheological equations from molecular network theories. *Trans. Soc. Rheol.* 1972. Vol. 16, pp. 99-127.
- [24]. Yasuda R.A.K., Cohen R. Shear-flow properties of concentrated-solutions of linear and star branched polystyrenes. *Rheol. Acta*. 1981. Vol. 20, pp. 163-178.
- [25]. Sivakumar P., Bharti R.P., Chhabra R.P. Effect of power-law index on critical parameters for power-law flow across an unconfined circular cylinder // *Chemical Engineering Science*. 2006. V. 61, issue 18, pp. 6035-6046.
- [26]. Bharti R.P., Chhabra R.P., Eswaran V. Steady flow of power law fluids across a circular cylinder. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*. 2006. V. 84, pp. 406-421.
- [27]. Panda S.K., Chhabra R.P. Laminar flow of power-law fluids past a rotating cylinder. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 2010. V. 165, pp. 1442-1461.
- [28]. Пузикова В. В. Параллельный программный комплекс LS-STAG\_GNF для моделирования течений неньютоновских вязких жидкостей (обобщенных ньютоновских жидкостей); свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2023663406, зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 16.06.23 / Puzikova V. V. Parallel software package LS-STAG\_GNF for non-Newtonian viscous (generalized Newtonian) fluid simulation; Certificate of state registration of a computer program No. 2023663406, registered in the Register of Computer Programs on 06/16/23 (in Russian).

## **Информация об авторах / Information about authors**

Илья Константинович МАРЧЕВСКИЙ – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сфера научных интересов: вычислительная гидродинамика, вихревые методы, теория устойчивости, численные методы, высокопроизводительные вычисления, элементарная математика.

Iliia Konstantinovich MARCHEVSKY – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Associate professor, Professor of Applied Mathematics department, Bauman Moscow State Technical University. Research interests:



computational fluid dynamics, vortex particle methods, theory of stability, numerical methods, high performance computing, elementary mathematics.

Валерия Валентиновна ПУЗИКОВА – кандидат физико-математических наук, эксперт по разработке программного обеспечения Отдела разработки высокопроизводительных библиотек компании YADRO. Сфера научных интересов: решатели и предобуславливатели СЛАУ, разработка прикладных математических программ, вычислительная гидродинамика, физические движки для AR/VR, высокопроизводительные вычисления, численные методы.

Valeria Valentinovna PUZIKOVA – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Software Development Expert in High Performance Libraries Department, YADRO. Research interests: solvers and preconditioners for SLAE, applied mathematics software development, computational hydrodynamics, physics engines for AR/VR, high performance computations, numerical methods.

