

DOI: 10.15514/ISPRAS-2025-37(2)-1



Оценка неопределенности в задаче регрессии при байесовской регуляризации решения

А.С. Нужный, ORCID: 0000-0003-3319-2523 <nuzhny@ibrae.ac.ru>

Е.А. Савельева, ORCID: 0000-0002- 6562-8750 <esav@ibrae.ac.ru>

*Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН,
Россия, 115191, г. Москва, ул. Большая Тульская, д.52.*

Аннотация. Рассматривается проблема оценки неопределенности в задаче регрессии. Решение задачи регрессии в данной работе ищется в виде ряда из базисных функций. Коэффициенты при базисных функциях подбираются путем минимизации суммы среднеквадратичной ошибки аппроксимации искомой функцией данных обучающего множества и регуляризационного слагаемого, смысл которого в наложении ограничений на множество решений. Добавление регуляризационного слагаемого – один из способов борьбы с математической некорректностью задачи. Регуляризационное слагаемое состоит из штрафного функционала и регуляризационного множителя, который является дополнительным параметром регрессионной модели. Байесовский подход к оценке оптимального значения регуляризационного множителя дает возможность получить его непосредственно из данных, как наиболее правдоподобное. Выбор регрессионной модели в виде ряда базисных функций из заданного набора позволяет сократить высокую вычислительную стоимость байесовского подхода за счет замены итерационной процедуры, используемой для модели общего вида, аналитическими выражениями. В процессе поиска регуляризационного множителя байесовский подход вычисляет оценку неопределенности получаемого решения. Корректность данной оценки является предметом текущего исследования. Предложенный подход к оценке неопределенности тестируется на модельных данных, зашумленных искусственным шумом. Показывается, что полученная предлагаемым методом оценка величины шума, дает хорошее совпадение со значением, заданным при генерации данных. Точность предлагаемого метода превосходила на модельных примерах точность используемого для оценки неопределенности набора данных Гамма-теста.

Ключевые слова: оценка неопределенности; задача регрессии; байесовская регуляризация.

Для цитирования: Нужный А.С., Савельева Е.А. Оценка неопределенности в задаче регрессии при байесовской регуляризации решения. Труды ИСП РАН, том 37, вып. 2, 2025 г., стр. 7–18. DOI: 10.15514/ISPRAS-2025-37(2)-1.

Estimation of Uncertainty in the Regression Problem with Bayesian Regularization of the Solution

A.S. Nuzhny, ORCID: 0000-0003-3319-2523 <nuzhny@ibrae.ac.ru>

E.A. Saveleva, ORCID: 0000-0002- 6562-8750 <esav@ibrae.ac.ru>

*Nuclear safety institute of the Russian Academy of Sciences,
52, Bolshaya Tulkaya Street, Moscow, 115191, Russia*

Abstract. The work considers the estimation of uncertainty of the regression model. The regression model is sought as a linear combination of basic functions. Coefficients in the linear combination are selected by minimizing the sum of the root-mean-square error of the approximation on the training set and the regularization term, which imposes restrictions on the set of solutions. Using a regularization term is one of the ways to combat the mathematical incorrectness of the problem. The regularization term consists of a penalty function and a regularization factor, which is an additional parameter of the regression model. The Bayesian approach allows to estimate the optimal value of the regularization factor directly from the data as being the most plausible. Constructing a regression model as a linear combination of basic functions (from a predefined set) allows us to reduce the high computational cost of the Bayesian approach by replacing the general iterative procedure by analytical expressions. A byproduct of estimating the regularization factor by Bayesian approach is the uncertainty of the regression model. The correctness of this assessment is the main subject of this research. The proposed approach of the uncertainty estimation is tested on the synthetic artificially noisy data. The proposed method estimated the noise magnitude close to the value used during data generation. The accuracy of the proposed method has outperformed the accuracy of the Gamma test, approach widely used to estimate uncertainty incorporated into the set of data.

Keywords: uncertainty estimation; regression problem; Bayesian regularization.

For citation: Nuzhny A.S., Saveleva E.A. Estimation of uncertainty in the regression problem with Bayesian regularization of the solution. *Trudy ISP RAN/Proc. ISP RAS*, vol. 37, issue 2, 2025. pp. 7-18 (in Russian). DOI: 10.15514/ISPRAS-2025-37(2)-1.

1. Введение

В работе рассматривается проблема оценки неопределенности результатов в задаче регрессии [1], которая относится к классу задач, известному в литературе, как «обучение с учителем». Задача регрессии формулируется следующим образом: дано множество примеров соответствия значений скалярной функции y ее векторным аргументам $\vec{x}$:

$$D = \{\vec{x}_i, y_i\}_{i=1}^L, \quad (1)$$

где L – число таких примеров. Требуется по этим примерам построить зависимость между множествами X и Y :

$$y' = f(\vec{x}, \vec{a}),$$

где $\vec{a}$ – адаптивные параметры модели. На практике зависимость между входами X и выходами Y описывается не точно, а с некоторой невязкой $\eta = y - y'$, то есть:

$$y = f(\vec{x}, \vec{a}) + \eta$$

что обуславливается несколькими причинами [2]:

1. данные (1) представляют собой экспериментальные измерения, неточность которых связана с приборной и методической ошибкой;
2. не все факторы, влияющие на выходное значение, присутствуют во входной информации;
3. отображение входного множества в выходное не является гладким.

Оценка неопределенности прогноза представляется практически важной задачей, поскольку данный показатель характеризует степень достоверности результата. Другим важным практическим приложением оценки неопределенности является подбор наиболее значимых

входных переменных – наиболее информативная комбинация переменных имеет наименьшую неопределенность [2].

Многие методы регрессии решают задачу построения отображения X в Y , не поднимая вопрос оценки точности построенного конечного отображения (например, нейронные сети [3], градиентный бустинг [4], случайный лес [5] и т. д.). При этом существуют методы (например, кригинг [6], гауссовы процессы [7-8]), которые одновременно с прогнозом значения целевой переменной дают оценку локальной (в оцениваемой точке) неопределенности этого прогноза. Другие методы решают задачу оценки неопределенности в данных не локально, а в среднем по всей выборке [2]. В данной работе задача оценки неопределенности рассматривается, как оценка в среднем по выборке.

Задача регрессии в ее традиционной постановке, как и большинство обратных задач является некорректной. Один из способов борьбы с некорректностью – регуляризация обучения, когда адаптивные параметры модели $\vec{a}$ находятся путем минимизации ошибки обучения совместно со стабилизирующим членом Ω [9]:

$$(y - f(\vec{x}, \vec{a}))^2 + \lambda \Omega(\vec{a})$$

При этом в байесовском подходе [1, 10-11] регуляризационный множитель λ подбирается исходя из множества обучающих данных (1), как имеющий максимальное правдоподобие. Попутно, байесовский подход позволяет оценить неопределенность результата модели. Идея такой оценки неопределенности не нова [11], однако она не получила широкого распространения ввиду вычислительной затратности самого байесовского подхода к оценке регуляризационного множителя. В [1,10] предложены математические решения, позволяющие обойти проблему затратности вычислений в случае использования модели на основе базисных функций, что делает такой подход практически интересным в том числе и для оценки неопределенности в данных.

Подход имеет линейную зависимость вычислительной сложности от числа точек L , что делает его привлекательным с прикладной точки зрения. Для сравнения, вычислительная сложность обсуждаемого в работе [2] гамма-теста, метода оценки уровня внутренней неопределенности набора данных, зависит от числа точек L в данных (1), как $O(L \log L)$ [2]. Кроме того, проведенные эксперименты показали, что оценка неопределенности, даваемая предлагаемым методом в среднем более релевантна, чем оценка Гамма-теста, которая склонна к консервативному завышению.

В работе предполагается, что неопределенность в данных – случайная величина η , распределенная по нормальному закону:

$$p(\eta) = \frac{1}{Z_\eta} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2\sigma^2}\right), \quad (2)$$

что на практике достаточно часто соответствует действительности. В таком случае величину неопределенности можно характеризовать параметром гауссовского распределения σ .

В данной работе метод байесовской регуляризации обучения адаптирован к задаче оценки неопределенности и опробован на синтетических примерах с искусственно зашумленными данными, а также применен для оценки неопределенности реальных данных мониторинга уровня грунтовых вод и выпадения осадков. Полученные оценки неопределенности сравнивались с оценками, полученными с помощью Гамма-теста [2].

2. Подход к моделированию аппроксимирующей функции

Для построения модели аппроксимации функции необходимо сделать ряд предположений относительно данных и вида модели. Во-первых, как было упомянуто выше (2), будем считать, что неопределенность в данных имеет нормальное распределение, т.е. вероятность появления значения y_i для аргумента $\vec{x}_i$ запишется следующим образом:

$$p(y_i|\vec{x}_i) = \frac{1}{Z_X} \exp\left(-\beta(y_i - f(\vec{x}_i, \vec{a}))^2\right),$$

А вероятность появления всей выборки (1):

$$p(D) = \frac{1}{Z_X} \exp\left(-\beta \sum_{i=1}^L (y_i - f(\vec{x}_i, \vec{a}))^2\right) \quad (3)$$

Здесь Z_X – нормировочный коэффициент, β – гиперпараметр модели. Это наиболее часто используемое предположение о характере шума в данных [1-2, 7].

Во-вторых, необходимо сделать предположения относительно внешнего вида функции $f(\vec{x}_i, \vec{a})$. Будем искать ее в виде линейной комбинации базисных функций $\{\psi_n(\vec{x})\}_{n=1}^N$,

$$y = \sum_{n=1}^N a_n \psi_n(\vec{x}),$$

где N – число используемых базисных функций, a_n – определяемые в процессе обучения параметры модели. В качестве базисных функций могут выступать любые наборы независимых функций (тригонометрические функции, функции радиального базиса, Эрмит-Гауссовы функции и т.п.)

Максимизация вероятности (3) приведет к методу подбора параметров модели $\vec{a}$, известному, как метод наименьших квадратов:

$$\vec{a} = \operatorname{argmin} \sum_{i=1}^L \left(y_i - \sum_{n=1}^N a_n \psi_n(\vec{x}_i) \right)^2 \quad (4)$$

В такой постановке задача является математически некорректной [1], т.е. имеющей множество решений. Для приведения задачи к корректной можно наложить дополнительные ограничения на множество решений – применить регуляризацию [9]. Формально регуляризация сводится к замене функционала (4) регуляризационным функционалом, содержащим дополнительное слагаемое

$$\vec{a} = \operatorname{argmin} \left(\sum_{i=1}^L \left(y_i - \sum_{n=1}^N a_n \psi_n(\vec{x}_i) \right)^2 + \lambda \Omega(a_n) \right) \quad (5)$$

Здесь необходимо сделать третье предположение, касающееся вида регуляризационного функционала. В данной работе возьмем его в гауссовой форме, это одна из наиболее распространенных форм для штрафных функционалов:

$$\Omega(a_n) = \sum_{n=1}^N a_n^2 \quad (6)$$

При таком выборе функционала задача поиска параметров модели $\vec{a}$ при заданном λ сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений [1].

Регуляризационный множитель λ в (5) [1] играет важную роль: большое значение этого параметра соответствует сильным ограничением на множество допустимых решений, маленькое – слабым. При слишком сильном ограничении на множество решений модель теряет свою гибкость и не может с хорошей точностью описать данные, при излишне слабых – задача поиска параметров модели остается некорректной. Таким образом определение оптимального значения λ является отдельной проблемой [1, 10-11].

Функционалом (6) мы фактически задаем априорную вероятность для каждой возможной функции из множества решений:

$$p(f) = \frac{1}{Z_A} \exp\left(-\alpha \sum_{n=1}^N a_n^2\right), \quad (7)$$

где Z_A – нормировочный коэффициент, а α – еще один гиперпараметр модели.

Вероятность выбора параметров модели для описания данных (1), в нашем случае коэффициентов разложения по базисным функциям, записывается через формулу Байеса:

$$p(D|f) = \frac{p(D|f) p(f)}{p(D)} \quad (8)$$

Максимизация вероятности $p(D|f)$ по параметрам a_n эквивалентна минимизации регуляризационного функционала (5) и дает оптимальные значения коэффициентов a_n при заданных гиперпараметрах α и β (из формул (7) и (3) соответственно). Математически, максимизация (8) по a_n также сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений [1]. При этом регуляризационный множитель может быть выражен через гиперпараметры функций вероятностей:

$$\lambda = \frac{\alpha}{\beta}$$

Гиперпараметры также, как и коэффициенты при базисных функциях, могут быть определены на основе обучающей выборки, как наиболее правдоподобные путем максимизации по ним знаменателя формулы (8) – $p(D)$ [1, 10-11].

В работе [1] было показано, что можно избежать вычислительных трудностей и лишних допущений при поиске параметров α и β , если путем линейного преобразования перейти к ортонормальному базису – базису, для которого свертки векторов значений в точках обучающего множества ортонормированы:

$$\sum_{i=1}^L \psi_n(\vec{x}_i) \psi_m(\vec{x}_i) = \delta_{m,n} \quad (9)$$

В этом случае оптимальные значения гиперпараметров вычисляются по аналитическим выражениям:

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{L - N}{\frac{L}{N} S - \bar{y}^2}, \quad \beta = \frac{1}{2} \frac{L - N}{\bar{y}^2 - S} \quad (10)$$

где

$$S = \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^L (y_i \psi_n(\vec{x}_i))^2, \quad \bar{y}^2 = \sum_{i=1}^L y_i^2$$

Как видно из (3) β является параметром, характеризующим неопределенность предсказания модели. Он связан с дисперсией величины отклонения предсказания от истинного значения σ следующей формулой:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{2\beta}} \quad (11)$$

Таким образом, получив в процессе построения аппроксимирующей функции параметр β через выражение (10), можно использовать его для оценки неопределенности полученного результата.

В итоге процедура оценки неопределенности в данных сводится к следующему алгоритму:

- выбираем семейство базисных функций, вычисляем значения базисных функций в точках обучающей выборки;
- строим ортогонализирующее преобразование, которое позволяет получить новые базисные функции, удовлетворяющие условию (9);
- по формулам (10) – (11) вычисляем оценку неопределенности.

3. Эксперименты

Выше уже говорилось, что неопределенность в задаче регрессии складывается из естественного шума в данных и недостатка информации для построения зависимости входов от выходов. В отличие от второго фактора первый мы можем моделировать, задав в функции, генерирующей данные, случайную компоненту. Цель проведения серии численных экспериментов на искусственных данных состоит в том, чтобы показать, что вычисленное по формулам (10) и (11) значение дисперсии ошибки аппроксимации согласуется с искусственно заданным при генерации данных значением неопределенности. Т.е. в экспериментах считаем, что неопределенность состоит только из шумовой компоненты.

3.1 Аппроксимация одномерных данных

Рассмотрим функцию, моделирующую отображение одномерного множества X в Y :

$$f = 10exp\left(-\frac{x^2}{2A^2}\right)\cos^2(x) + \sigma_0\xi,$$
 (12)

где ξ – случайная нормально распределенная величина с нулевым средним и единичной дисперсией, параметр $A = 10$. С помощью выражения (12) были сгенерированы обучающие примеры (1) с разными значениями параметра шума σ_0 . В каждом эксперименте генерировалось по 100 обучающих точек. При воссоздании отображения по этим примерам в качестве базисных функций использовались тригонометрические функции и функции радиального базиса [10]. В табл. 1 приведены результаты оценки, полученные с использованием этих базисов, оценка, полученная с помощью Гамма-теста, а также истинные значения шума σ_0 , заданные при генерации точек функцией (12). В скобках указаны относительные ошибки оценки величины шума.

Табл. 1. Заданные и оцененные значения ошибки.
Table 1. Set and estimated error values.

Номер эксперимента	Истинное значение σ_0	Оцененное моделью с тригонометрическим базисом значение σ	Оцененное моделью с ФРБ значение σ	Оценка Гамма-теста
1	0	7.108e – 8	3.05e-5	0.31
2	0.5	0.495 (1%)	0.51 (2%)	0.52 (4%)
3	1	1.02 (2%)	0.95 (5%)	1.18 (18%)
4	2	1.97 (1.5%)	2.03 (1.5%)	2.08 (4%)

На рис. 1 приведены результаты аппроксимации функции по сгенерированным точкам при значениях σ_0 равных а) 0, б) 0.5, в) 1, г) 2 моделью с тригонометрическим базисом.

3.2 Аппроксимация двумерных данных

Далее рассмотрим отображение двумерных данных X на скалярное множество Y :

$$f = 10exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2A^2}\right)\left(\sin^2(x_1) + \sin^2\left(\frac{x_2}{2}\right)\right) + \sigma_0\xi,$$
 (13)

где ξ – случайная нормально распределенная величина с нулевым средним и единичной дисперсией, параметр $A = 10$. Была проведена серия экспериментов: с помощью выражения (13) генерировалось 500 точек, после чего по этим точкам с помощью метода базисных функций восстанавливалось отображение X в Y . В качестве базисных функций брались двумерные тригонометрические и радиальные базисные функции. В экспериментах варьировался параметр шума σ_0 . Оцененное значение величины шума σ сравнивалось с заданным σ_0 . Результаты некоторых оценок, сопоставленные с исходным уровнем шума в

данных приведены в табл. 2. В скобках указаны относительные отклонения оценки метода от заданного в эксперименте значения величины шума.

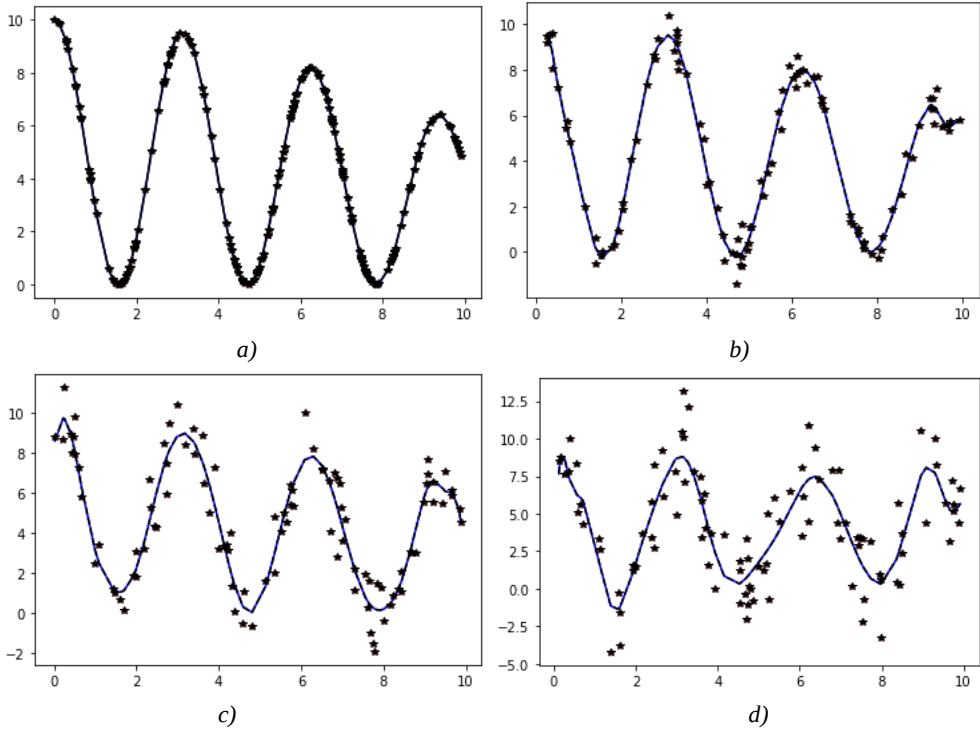


Рис. 1. Аппроксимация одномерных данных при а) $\sigma = 0$, б) $\sigma = 0.5$, в) $\sigma = 1$, д) $\sigma = 2$.

Fig. 1. One-dimensional data approximation at при а) $\sigma = 0$, б) $\sigma = 0.5$, в) $\sigma = 1$, д) $\sigma = 2$.

Табл. 2. Заданные и оцененные значения ошибки в экспериментах с двумерными данными.

Table 2. Set and estimated error values in two-dimensional data experiments.

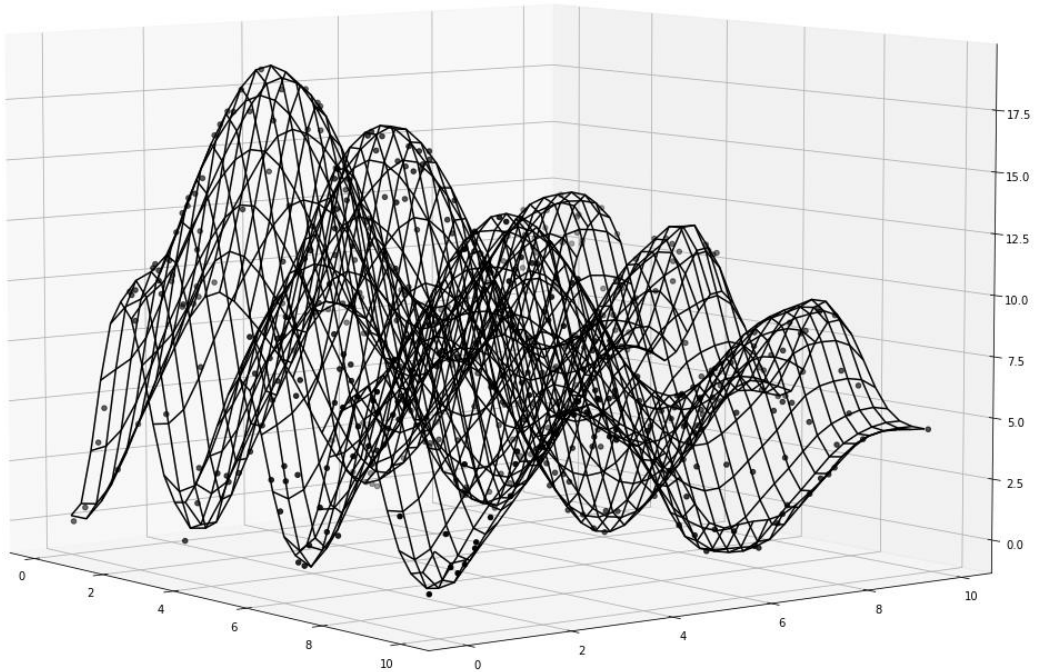
Номер эксперимента	Истинное значение σ	Оцененное моделью с тригонометрическим базисом значение σ	Оцененное моделью с ФРБ значение σ	Оценка Гамма-теста
1	0	0.00025	0.049	0.3
2	0.5	0.506 (1.2%)	0.505 (1%)	0.65 (30%)
3	1	1.02 (2%)	1.05 (5%)	1.07 (7%)
4	2	1.97 (1.5%)	2.01(0.5%)	2.06 (3%)

На рис. 2 приведены результаты аппроксимации двумерных данных, сгенерированных функцией (13) с уровнем шума 0 и 1.

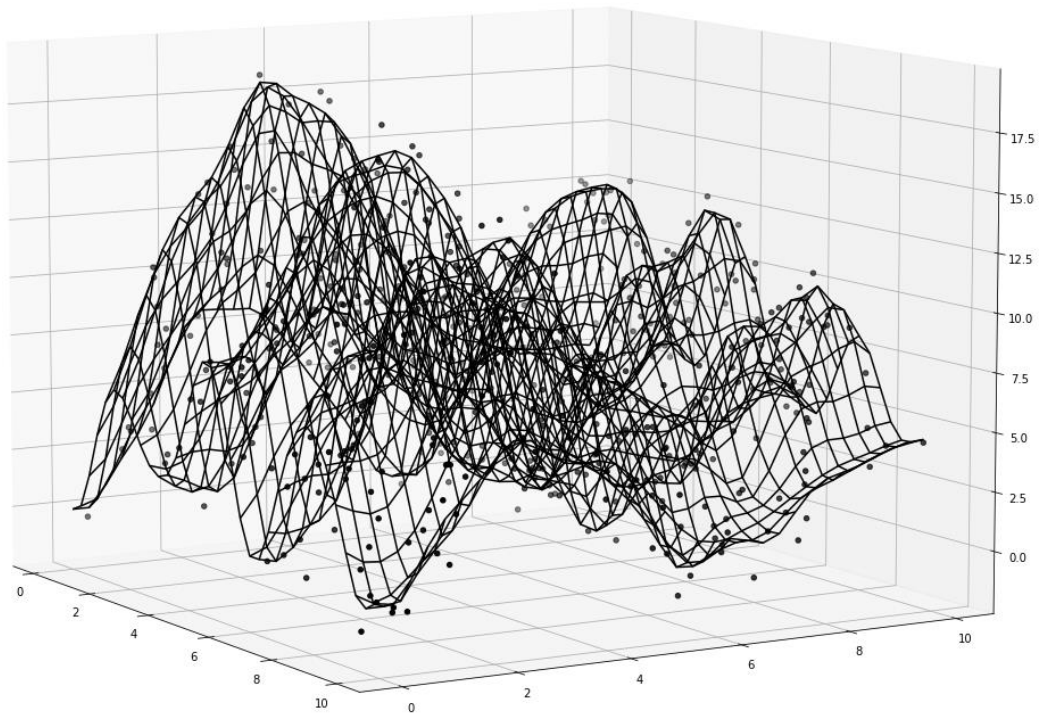
Всего было подготовлено 150 случайных выборок данных (75 одномерных – по формуле (12) и 75 двумерных по формуле (13)) с показателями шума 0.5, 1 и 2. В табл. 3 приведены значения средней по всем экспериментам относительной ошибки (MAPE):

$$MAPE = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \frac{|\sigma^j - \sigma_0^j|}{\sigma_0^j}$$

Здесь J – число проведенных экспериментов.



a)



b)

Рис. 2. Аппроксимация данных, сгенерированных функцией (11) с параметром шума
а) $\sigma = 0$; б) $\sigma = 1$ с помощью функций радиального базиса.
Fig. 2. Approximation of data generated with function (11) with noise parameter
а) $\sigma = 0$; б) $\sigma = 1$ using radial basis function.

Табл. 3. Показатели точности определения значения неопределенности.

Table 3. The indicators of accuracy of uncertainty estimation.

	Модель с тригонометрическим базисом	Модель с ФБР	Гамма-тест
MAPE	0.048	0.049	0.1

В проведенной серии экспериментов байесовский метод оценки неопределенности показал себя, как более точный по сравнению с гамма-тестом, который демонстрирует склонность к завышению уровня шума.

3.3 Оценка неопределенности в реальных данных

На рис. 3 приведены результаты аппроксимации значений ежемесячного мониторинга уровней грунтовых вод в 3-х скважинах (рис. 3а, 3б, 3с) и выпадения осадков (рис. 3д) с помощью тригонометрического базиса. Уровни грунтовых вод, как и осадки измеряются в сантиметрах. По оси абсцисс отложено время в месяцах от начала измерений. При оценке уровня шума в данных предполагается, что он имеет гауссову природу и может характеризоваться параметром σ (2).

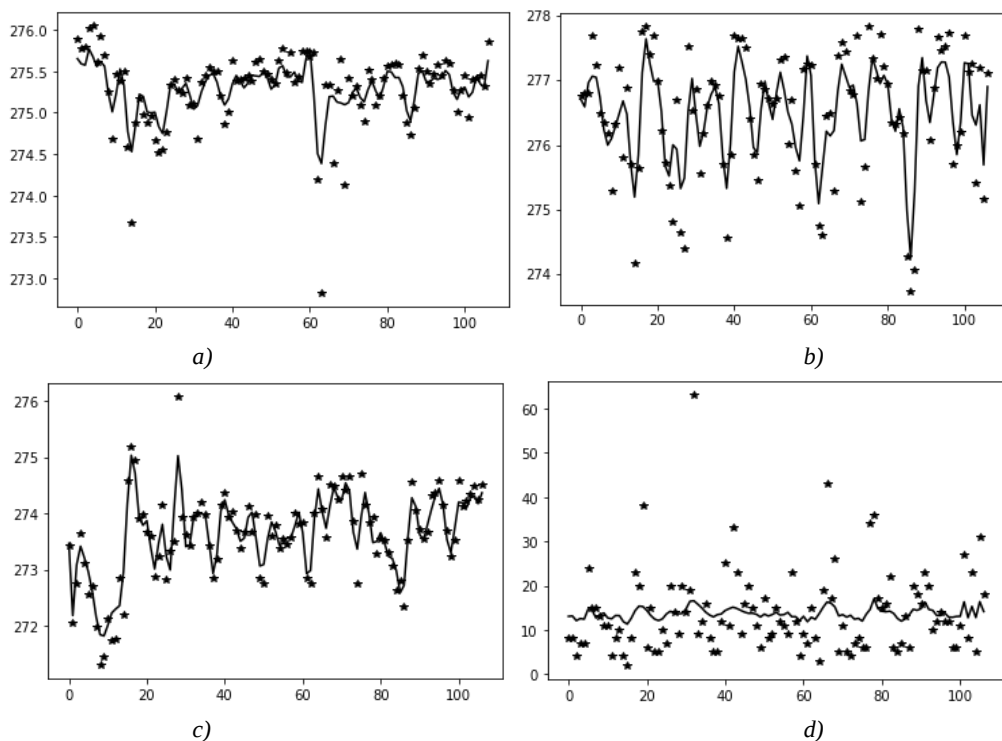


Рис. 3. Результаты аппроксимации графиков уровней грунтовых вод – а), б), в) и графика выпадения осадков – г).

Fig. 3. The results of the approximation of the groundwater levels – a), b), c) and the precipitation – d).

Из внешнего вида графиков можно констатировать, что уровни грунтовых вод достаточно сильно зашумлены, однако модель все-таки выявляет в них некоторые закономерности. В данных же по осадкам модель видит практически только белый шум.

В табл. 4 приведены оценки уровня шума σ , полученные моделями с тригонометрическим базисом и базисом радиальных функций, а также оценки, полученные с помощью Гамма-теста [2]. Указано абсолютное значение шума σ и рядом в скобках приведено значение, нормированное на дисперсию оцениваемой величины.

Табл. 4. Оценки неопределенности в гидрогеологических данных.

Table 4. Estimates of uncertainty in hydrogeological data.

Данные	Байесовская модель с тригонометрическим базисом	Байесовская модель с функциями радиального базиса	Гамма-тест
Скважина1	0.39(0.83)	0.35(0.75)	0.35(0.76)
Скважина2	0.67(0.67)	0.73(0.74)	0.77(0.77)
Скважина3	0.45(0.57)	0.44(0.57)	0.5(0.62)
Осадки	8.99(0.95)	8.45(0.9)	8.67(0.92)

Здесь можно говорить о близости оценки неопределенности, полученных байесовским методом и Гамма-тестом.

4. Заключение

В работе рассмотрен метод оценки неопределенности в задаче аппроксимации функции по точкам. Для тестирования данного метода была проведена серия экспериментов на искусственно сгенерированных данных, зашумленных случайным нормально распределенным шумом. Уровень зашумленности регулировался параметром функции, генерирующей данные. Эксперименты показали хорошее совпадение между исходным параметром шума σ_0 , заданным при генерации данных, и полученной оценкой σ . Предлагаемый метод превзошел по точности традиционно используемый для задачи оценки неопределенности Гамма-тест.

С помощью описанного подхода была проведена оценка неопределенности в данных гидрогеологических наблюдений. Результат также сравнивался с оценкой, полученной с помощью Гамма-теста. В данном примере два подхода показали хорошую согласованность. Следует отметить, что вычислительная затратность предложенного метода линейно растет с ростом числа данных в то время, как Гамма-тест имеет зависимость от числа данных $O(L \log L)$.

Список литературы / References

[1]. Нужный А.С. Регуляризация Байеса при подборе весовых коэффициентов в ансамблях предикторов. Труды ИСП РАН, том 31, вып. 4, 2019 г., стр. 113-120. DOI: 10.15514/ISPRAS2019-31(4)-7 / Nuzhny A.S. Bayes regularization in the selection of weight coefficients in the predictor ensembles. Trudy ISP RAN/Proc. ISP RAS, vol. 31, issue 4, 2019. pp. 113-120 (in Russian). DOI: 10.15514/ISPRAS-2019-31(4)-7

[2]. Antonia J. Jones, Dafydd Evans, Steve Margetts, Peter M. Durrant. The Gamma Test. Chapter IX in Heuristic and Optimization for Knowledge Discovery. Edited by Ruhul Sarker, Hussein Abbass and Charles Newton. Idea Group Publishing, Hershey, PA. 2002.

[3]. Гудфеллоу Я., Бенджио И., Курвилль А. Глубокое обучение / пер. с англ. А. А. Слинкина. – 2-е изд., испр. – М.: ДМК, Пресс, 2018., 652с. / Ian Goodfellow, Yoshua Bengio, and Aaron Courville: Deep learning: The MIT Press, 2016, 800 pp, ISBN: 0262035618

[4]. Friedman J.H. Greedy function approximation: a gradient boosting machine // The Annals of Statistics. – 2001. – Vol. 29, no. 5. – P. 1189–1232.

[5]. Hastie, T., Tibshirani R., Friedman J. Chapter 15. Random Forests // The Elements of Statistical Learning: Data Mining, Inference, and Prediction. — 2nd ed. — Springer-Verlag, 2009. — 746 p.

[6]. В. В. Демьянов, Е. А. Савельева, ГЕОСТАТИСТИКА теория и практика, Москва, Наука, 2010, 227с. / V.V. Demyanov, E.A. Saveleva, GEOSTATISTICS theory and practice, Moscow, Nauka, 2010, 227p (in Russian)

- [7]. Rasmussen, C. E. and C. K. I. Williams. *Gaussian Processes for Machine Learning*. MIT Press. Cambridge, Massachusetts, 2006.
- [8]. Z. Chen, B. Wang, How priors of initial hyperparameters affect Gaussian process regression models, *Neurocomputing* 275 (2018) 1702–1710.
- [9]. А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. Методы решения некорректных задач. Изд. 2-е. – М.: Наука, 1979, 285с. / A.N. Tichonov, V.Ya. Arsenin. The methods for solving ill-passed problems, Moscow, Nauka, 1979, 285p. (in Russian)
- [10]. А.С. Нужный. Байесовский подход к регуляризации задачи обучения сети функций радиального базиса // Искусственный интеллект и принятие решений, 2015, №2, сс. 18-24. / A.S. Nuzhny, Bayesian approach to regularization for training task of radial basic function network // Artificial intelligent and decision making, 2015, №2, pp. 18-24. (in Russian)
- [11]. D. MacKay. Bayesian interpolation // *Neural Computation*, 1992, v.4, p.415–447.

Информация об авторах / Information about authors

Антон Сергеевич НУЖНЫЙ – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник ИБРАЭ РАН, доцент национального исследовательского университета МФТИ. Сфера научных интересов: искусственный интеллект, некорректные задачи, оптимальное управление, интеллектуальный анализ информации.

Anton Sergeevich NUZHNY, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Senior Researcher at IBRAE RAS, Associate Professor at the National Research University MIPT. Research interests: artificial intelligence, ill-passed problems, optimal control, data manning.

Елена Александровна САВЕЛЬЕВА – кандидат физико-математических наук, заведующий лабораторией Института проблем безопасного развития атомной энергетики РАН. Сфера научных интересов: геостатистика, искусственный интеллект, интеллектуальный анализ информации, оценка чувствительности расчетных моделей к их параметрам.

Elena Aleksandrovna SAVELEVA, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Head of Laboratory in Nuclear Safety Institute RAS. Research interests: geostatistics, artificial intelligence, data manning, sensitivity analysis.

