DOI: 10.15514/ISPRAS-2025-37(2)-12

Математическое моделирование турбулентного потока жидкости с помощью квазигидродинамических уравнений и модели турбулентности k-omega

К.С. Королёва, ORCID: 0000-0002-8872-0277 <snigur.ks@ccfebras.ru>
И.И. Потапов, ORCID: 0000-0002-3323-2727 <potapov2i@gmail.com>

Вычислительный центр Дальневосточного отделения Российской академии наук, Россия, 680000, г. Хабаровск, ул. Ким Ю Чена, д. 65.

Аннотация. В настоящей работе предложена математическая модель для решения задачи о течении развитого турбулентного потока в канале. В качестве уравнений, описывающих течение жидкости, используются уравнения Рейнольдса и уравнения модели турбулентности k-omega, приведенные к квазигидродинамическому виду. Для численного решения уравнений математической постановки использовался комбинированный подход, сочетающий метод контрольных объемов и метод конечных элементов на треугольных адаптивных сетках. Для верификации предложенной математической модели была решена задача о течении турбулентного потока в канале прямоугольной формы. Полученные результаты показали, хорошее согласование результатов по предложенной модели с результатами прямого численного моделирования в области турбулентного подслоя. Для дальнейшей верификации модели был выполнен расчет ряда задач об обтекании турбулентным потоком фиксированных песчаных дюн с различным углом подветренного склона. Выполнен сравнительный анализ расчетных характеристик потока с экспериментальными данными, который показал их качественное и количественное согласование, за исключением значений кинетической энергии турбулентности в случае обтекания пологих дюн. Хорошее согласование значений осредненного над одной дюной сдвигового напряжения Рейнольдса и общего касательного напряжения, полученных по предложенной модели, с экспериментальными данными позволяет использовать предложенную модель для расчета характеристик гидродинамического потока, проходящего над изменяющимися во времени донными формами.

Ключевые слова: гидродинамика; квазигидродинамические уравнения; турбулентность; математическое моделирование.

Для цитирования: Королёва К.С., Потапов И.И. Математическое моделирование турбулентного потока жидкости с помощью квазигидродинамических уравнений и модели турбулетности k-omega. Труды ИСП РАН, том 37, вып. 2, 2025 г., стр. 163–180. DOI: 10.15514/ISPRAS–2025–37(2)–12.

Mathematical Modeling of a Turbulent Fluid Flow by using the Quasihydrodynamic Equations and K-omega Turbulence Model

K.S. Koroliova, ORCID: 0000-0002-8872-0277 < snigur.ks@ccfebras.ru >
I.I. Potapov, ORCID: 0000-0002-3323-2727 < potapov2i@gmail.com >

Computing Center of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences,
65, Kim U Chena st., Khabarovsk, 680000, Russia.

Abstract. In this paper, a mathematical model for solving the problem of developed turbulent flow in a channel is proposed. The equations describing the fluid flow are the Reynolds equations and the equations of the k-omega turbulence model reduced to a quasi-hydrodynamic form. For the numerical solution of the equations of the mathematical statement, a combined approach of the control volume method and the finite element method on triangular adaptive grids was used. To verify the proposed mathematical model, the problem of turbulent flow in a rectangular channel was solved. The results obtained showed a good agreement between the results of the proposed model and the results of direct numerical simulation in the turbulent sub-layer region. For further verification of the model, a number of problems of the turbulent flow past fixed sand dunes with different lee-slope angles were calculated. A comparative analysis of the calculated flow characteristics with experimental data was performed, which showed their qualitative and quantitative agreement, with the exception of the values of the turbulent kinetic energy in the case of flowing past low-angle dunes. Good agreement of the values of the Reynolds shear stress averaged over one dune and the total shear stress obtained using the proposed model with the experimental data allows us to use the proposed model to calculate the characteristics of a hydrodynamic flow passing over time-varying bed forms.

Keywords: hydrodynamic; quasihydrodynamic equation; turbulence; mathematical modeling.

For citation: Koroliova K.S., Potapov I.I. Mathematical modeling of a turbulent fluid flow by using the quasihydrodynamic equations and k-omega turbulence model. Trudy ISP RAN/Proc. ISP RAS, vol. 37, issue 2, 2025. pp. 163-180 (in Russian). DOI: 10.15514/ISPRAS-2025-37(2)-12.

1. Введение

На данный момент существует множество методов моделирования течения турбулентного потока воды в речном или искусственном канале. Самым точным и одновременно ресурсоемким является метод прямого моделирования DNS [1, 2]. Однако из-за высокой нелинейности пристеночного течения и требования к мелкому шагу сетки метод DNS ограничен по применению только в расчетных областях с простой геометрией и числами Рейнольдоса 8000-10000 [3, 4]. Метод крупных вихрей LES также часто используется для моделирования течения в каналах [4], вычислительная стоимость данного метода несколько ниже, поэтому он может применяться для моделирования течения в каналах с более высоким числом Рейнольдса. Однако, применение метода LES для расчета течения в реальном канале накладывает ограничения на сложность геометрии области [3]. Альтернативным методом моделирования турбулентного потока является использование метода RANS. Данный метод не требует такого большого количества вычислительных ресурсов как LES и DNS методы, что делает его более доступным для использования в расчетах течения реальных рек и каналов со сложной геометрией и высокими числами Рейнольдса [5, 6]. Развитие метода RANS и применение новых методик расчета позволит создавать более эффективные и доступные программные инструменты для исследования турбулентных течений в речных каналах.

В настоящей работе предлагается математическая постановка, описывающая движение развитого гидродинамического турбулентного потока в канале с ровным дном, с помощью двумерных уравнения Рейнольдса, приведенных к квазигидродинамической форме [7, 8]. Данный подход формулировки уравнений хорошо зарекомендовал себя при моделировании несжимаемой жидкости [9, 10]. Замыкание модели выполнено с помощью дифференциальной модели турбулентности k-omega [11], также приведенной квазигидродинамическому виду. Данный подход имеет ряд ключевых особенностей:

- позволяет использовать для решения уравнений движения явную вычислительную схему и центрально-разностный дискретный аналог без введения противопоточных механизмов;
- позволяет реализовывать высокоэффективную параллельность вычислительных процессов;
- позволяет использовать больший шаг по времени без потери устойчивости расчета по сравнению со стандартными методами решения уравнений Рейнольдса [12].

В качестве численных методов решения уравнений математической постановки используется метод контрольных объемов и метод конечных элементов на треугольных сетках, модифицированные для решения квазигидродинамических уравнений по технологии [13, 14].

С помощью предложенной модели выполнено численное моделирование гидродинамического потока, проходящего в канале с ровным дном. Решение данной задачи позволяет верифицировать предложенную математическую постановку, полученные дискретные аналоги и реализованный численный метод решения задачи. Выполнено сравнение полученных результатов численного моделирования с результатами моделирования других авторов, использующих подход DNS и LES [4].

С помощью предложенного подхода в работе выполнено решение задачи об обтекании турбулентным потоком фиксированных песчаных дюн разной формы.

2. Математическая постановка

В работе рассматривается задача течения развитого турбулентного потока в канале с ровным дном. Исходная форма дна канала показана на рис. 1. Полагается, что глубина потока достаточно большая, донная поверхность ровная, тогда волнение свободной поверхности пренебрежительно мало влияет на структуру потока, что позволяет перейти от моделирования открытого канала к моделированию закрытого напорного канала [15]. Также полагается, что канал имеет симметричную форму и постоянную ширину, поэтому процесс обтекания дна канала можно рассматривать в двумерном профильном приближении.

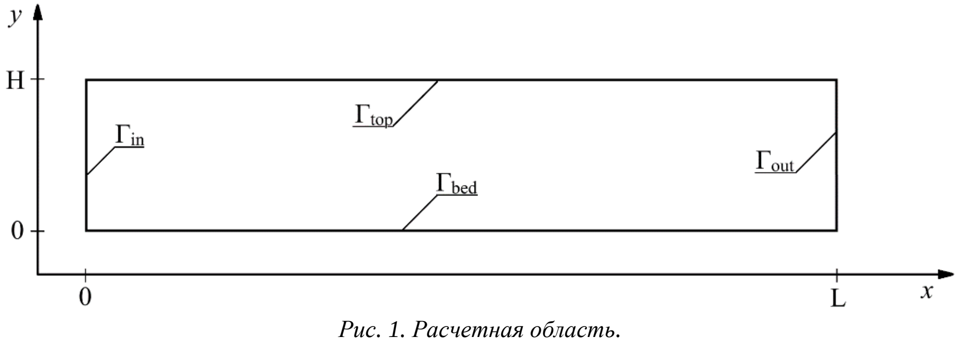

Рис. 1. Расчетная область.
Fig. 1. Computational domain.

В предложенной математической модели движение двумерного гидродинамического потока описывается с помощью квазигидродинамических уравнений [16].

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial\left[u^2-\left(2u\omega_x+W_\tau\right)\right]}{\partial x}+\frac{\partial\left[uv-\left(v\omega_x+u\omega_y\right)\right]}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\rho}\left(p+\frac{2}{3}k\right)= \\ =\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial\left[uv-\left(v\omega_x+u\omega_y\right)\right]}{\partial x}+\frac{\partial\left[v^2-\left(2v\omega_y+W_\tau\right)\right]}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\rho}\left(p+\frac{2}{3}k\right)= \\ =\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}=\frac{\rho}{\tau}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)- \\ -\rho\left(\frac{\partial}{\partial x}\left[u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{2}{3}\frac{\partial k}{\partial x}\right]-\frac{\partial}{\partial y}\left[u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{2}{3}\frac{\partial k}{\partial y}\right]\right), \quad (3)$$

$$e_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right),\ e_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right),\ e_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{1}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right), \quad (4)$$

$$\tau_{xx}=2\eta e_{xx},\ \tau_{xy}=2\eta e_{xy},\ \tau_{yy}=2\eta e_{yy}, \quad (5)$$

$$W_\tau=\tau\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{2}{3}\tau\left(u\frac{\partial k}{\partial x}+v\frac{\partial k}{\partial y}-F_k\right)+\frac{2}{3}k\tau\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right) \quad (6)$$

и модели турбулентности k-omega [11], приведенной к квазигидродинамическому виду,

$$\frac{\partial k}{\partial t}+\frac{\partial\left[ku-\left(k\omega_x+u\omega_k\right)\right]}{\partial x}+\frac{\partial\left[kv-\left(k\omega_y+v\omega\right)\right]}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\tilde{\eta}^*\frac{\partial k}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\tilde{\eta}^*\frac{\partial k}{\partial y}\right)+F_{k\tau}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial\left[wu-\left(w\omega_x+u\omega_w\right)\right]}{\partial x}+\frac{\partial\left[wv-\left(w\omega_y+v\omega_w\right)\right]}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\tilde{\eta}\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\tilde{\eta}\frac{\partial w}{\partial y}\right)+F_{w\tau}, \quad (8)$$

$$F_{k\tau}=\left(1-\tau\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right)F_k,\qquad F_k=P_k-\frac{2}{3}k\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\beta^*kw,$$

$$F_{w\tau}=\left(1-\tau\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right)F_w,\qquad F_w=\alpha\frac{w}{k}\left(P_k-\frac{2}{3}k\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right)-\beta w^2+\frac{\sigma_d}{w}\left(\frac{\partial k}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial k}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\right),$$

$$\eta=\eta_{mol}+\eta_T,\qquad \eta_T=\frac{k}{\tilde{w}},\qquad \tilde{w}=\max\left\{w,C_{\lim}\sqrt{\frac{2e_{ij}e_{ij}}{\beta}}\right\},\ C_{\lim}=\frac{7}{8},$$

$$2e_{ij}e_{ij}=2\left(e_{xx}^2+2e_{xy}^2+e_{yy}^2\right),$$

$$\omega_x=\tau\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{2}{3}\frac{\partial k}{\partial x}\right),\qquad \omega_y=\tau\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{2}{3}\frac{\partial k}{\partial y}\right),$$

$$\omega_k=\tau\left(u\frac{\partial k}{\partial x}+v\frac{\partial k}{\partial y}-F_k\right),\qquad \omega_w=\tau\left[u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}-F_w\right]$$

$$P_k=\eta_T\left(2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2-\frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right),$$

$$\tilde{\eta}^*=\eta_{mol}+\sigma^*\frac{k}{w},\qquad \tilde{\eta}=\eta_{mol}+\sigma\frac{k}{w}$$

$$\alpha=\frac{13}{25},\qquad \beta=0.0708,\qquad \beta^*=0.09,\qquad \sigma=0.5,\qquad \sigma^*=\frac{3}{5},$$

$$\sigma_d = \begin{cases} 0, & \dfrac{\partial k}{\partial x}\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial k}{\partial y}\dfrac{\partial w}{\partial y} \le 0, \\ \dfrac{1}{8}, & \dfrac{\partial k}{\partial x}\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial k}{\partial y}\dfrac{\partial w}{\partial y} > 0. \end{cases} \tag{9}$$

В уравнениях (1)-(9) x и y – это горизонтальная и вертикальная координаты, t – время, u и v – горизонтальная и вертикальная скорости потока, ρ – плотность воды, p– давление жидкости в канале, $\eta = \eta_{mol} + \eta_T$ – кинематическая вязкость жидкости, η_{mol}– молекулярная вязкость жидкости, η_T – турбулентная вязкость жидкости, τ – параметр регуляризации, k – кинетическая энергия турбулентности, w – удельная скорость диссипации турбулентности. Для решения задачи течения жидкости в канале с ровным дном модель (1)-(9) замыкается следующими начальными условиями

$$u = u_{in}, \quad v = 0, \quad p = 0, \quad k = k_{in}, \quad w = w_{in}, \quad \eta_T = \frac{k}{w}, \quad t = 0, \quad (x, y) \in \Omega$$

и граничными условиями

$$u = u_{in}, \quad v = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = P_{in}, \quad k = k_{in}, \quad w = w_{in}, \quad (x, y) \in \Gamma_{in}, \tag{10}$$

$$u = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial n} = 0, \quad k = 0, \quad w = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_{bed}, \tag{11}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial k}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_{top}, \tag{12}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad p = 0, \quad \frac{\partial k}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (x, y) \in \Gamma_{out}, \tag{13}$$

где $u_{in} = \dfrac{N+2}{N+1} u_{cp} \left[1 - \left(\dfrac{(y - 0.5H)}{0.5H} \right)^{N+1} \right]$ – профиль горизонтальной скорости на входе в область [17], коэффициент $N = \dfrac{H^2 P_{in}}{\rho \eta\, u_{cp}} - 2 \ge 1$ определяет вид профиля u_{in}, u_{cp} – средняя горизонтальная скорость потока, $P_{in} = -\dfrac{(2+N)}{H^2} \rho \eta u_{cp}$ – значение градиента давления на входе в область, $k_{in} = 1.5(I\, u_{in})^2$ – распределение кинетической энергии турбулентности на входе в область [18], $I = 0.2$ – интенсивность турбулентности, $w_{in} = \dfrac{\sqrt{k_{in}}}{l_{in}}$ – распределение скорости диссипации турбулентности на входе в область, $l_{in} = 0.1H$ – масштаб турбулентности, Γ_{in} и Γ_{out} – входная и выходная границы расчетной области Ω, Γ_{top} и Γ_{bed} – верхняя и нижняя граница расчетной области Ω, n - нормаль к соответствующей границе расчетной области.

3. Численный расчет

Уравнения (1)-(2), (7)-(8) решаются численно с помощью метода контрольных объемов на регулярной треугольной сетке со сгущением на нижнюю стенку, участок сетки в придонной области показан на рис. 2. Пример построенного контрольного объема показан на рис. 3.

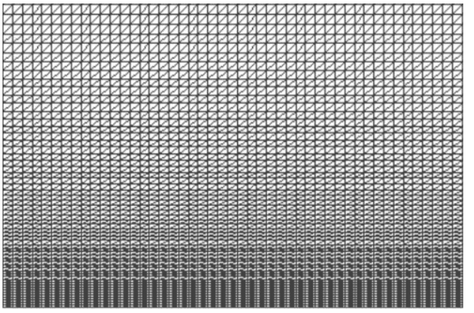

Рис. 2. Расчетная сетка у дна.
Fig. 2. Calculation grid in the near-bed area.

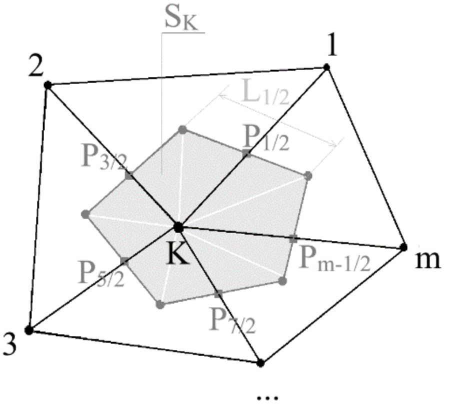

Рис. 3. Контрольный объем.
Fig. 3. Finite volume.

Дискретные аналоги уравнений (1)-(2) выведены по технологии, показанной в работах [8, 12] и имеют следующий вид

$$u_K^{n+1} = u_K^n + \frac{\Delta t}{S_K}\sum_{i=1/2}^{m-1/2}\begin{bmatrix}\left(-u^2 + 2u\omega_x + W_\tau\right)n_x + \left(-uv + v\omega_x + u\omega_y\right)n_y - \\ -\frac{1}{\rho}\left(p + \frac{2}{3}k\right)n_x + \tau_{xx}n_x + \tau_{xy}n_y\end{bmatrix}^n L_{K\,i+1/2},$$

$$v_K^{n+1} = v_K^n + \frac{\Delta t}{S_K}\sum_{i=1/2}^{m-1/2}\begin{bmatrix}\left(-u\,v + v\omega_x + u\omega_y\right)n_x + \left(-v^2 + 2v\omega_y + W_\tau\right)n_y - \\ -\frac{1}{\rho}\left(p + \frac{2}{3}k\right)n_y + \tau_{xy}\,n_x + \tau_{yy}\,n_y\end{bmatrix}^n L_{K\,i+1/2},$$

Дискретные аналоги уравнений (7)-(8) выведены аналогичным способом и имеют вид

$$k_K^{n+1} = k_K^n + \Delta t\left(\overline{F}_k\right)_K^n +$$
$$+\frac{\Delta t}{S_K}\sum_{i=1/2}^{m-1/2}\begin{bmatrix}\left(-ku + k\omega_x + u\omega_k\right)n_x + \left(-kv + k\omega_y + v\omega_k\right)n_y + \\ +\eta^*\left(\frac{\partial k}{\partial x}n_x + \frac{\partial k}{\partial y}n_y\right)\end{bmatrix}^n L_{K\,i+1/2},$$

$$w_K^{n+1} = w_K^n + \Delta t\left(\overline{F}_w\right)_K^n +$$
$$+\frac{\Delta t}{S_K}\sum_{i=1/2}^{m-1/2}\begin{bmatrix}\left(-wu + w\omega_x + u\omega_w\right)n_x + \left(-wv + w\omega_y + v\omega_w\right)n_y + \\ +\eta\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}n_x + \dfrac{\partial w}{\partial y}n_y\right)\end{bmatrix}^n L_{K\,i+1/2},$$

где K – центральный узел контрольного объема, m – количество точек, составляющих контур контрольного объема, n – номер итерации по времени, $\overline{F}$ – среднее значение функции на всей площади контрольного объема, S_K – площадь контрольного объема, L_K – длина отрезка контура контрольного объема.

Для определения давления по уравнению (3) в узлах сетки используется метод конечных элементов в слабой формулировке Галеркина [19]. Дискретизация выполняется для треугольных конечных элементов. Вывод дискретного аналога для уравнения (1) и его конечный вид показан в работе [8].

Для расчета характеристик потока вблизи дна и придонных касательных напряжений использовался метод пристеночных функций [20].

Программная реализация предложенной математической модели выполнена на языке программирования C# и доступна по ссылке [21].

4. Верификация модели

С помощью предложенной математической модели (1)-(13) в работе выполнено численное моделирование турбулентного потока, проходящего над ровным гладким дном. Расчетная область показана на рис. 1. Для расчета использовались следующие параметры: $\mathrm{Re} = 10^5$, средняя скорость потока $U_{av} = 0.3$ м/с, максимальная скорость потока $U_{\max} = 0.4$ м/с, глубина потока $H = 0.5$ м, длина канала $L = 5$ м, расход жидкости $Q = 0.1$ м^3/с. Количество узлов по вертикали составляло 250 со сгущением сетки у дна до шага $\Delta y = 2.7 \cdot 10^{-4}$ м, шаг по горизонтали составлял 1750 и был равномерный по длине, шаг по времени $\Delta t = 10^{-4}$ с, параметр регуляризации КГД $\tau = 10^{-4}$ с.

На рис. 4 показано распределение горизонтальной скорости потока в расчетной области. На рисунке видно, что в пределах одного метра от входа в область происходит перестроение потока (обозначено кругом) из-за влияния граничных условий на входе в область. Таким образом скорость в сечении $y = 4$ м (сечение показано на рис. 4 вертикальной линией) не подвержена возмущениям от граничных условий на входе и выходе из области и может быть рассмотрена подробнее. Профиль расчетной безразмерной скорости в данном сечении показан на рис. 5 серой пунктирной линией. Для сравнения на рис. 5 показаны данные из работы [4]: результаты прямого численного моделирования (сплошная черная линия), результаты моделирования по модели LES-SSM с подсеточной моделью Смагоринского (пунктирная линия с треугольниками), результаты моделирования по модели LES-DSM с динамической моделью Смагоринского (пунктирная линия с квадратами). Из сравнения графиков безразмерной скорости на рис. 5 видно, что предложенная модель хорошо согласуется с результатами прямого численного моделирования в области турбулентного подслоя, максимальная погрешность составляет 8% в области верхней границы области. Точность модели в области ламинарного подслоя можно повысить подбором другой пристеночной функции.

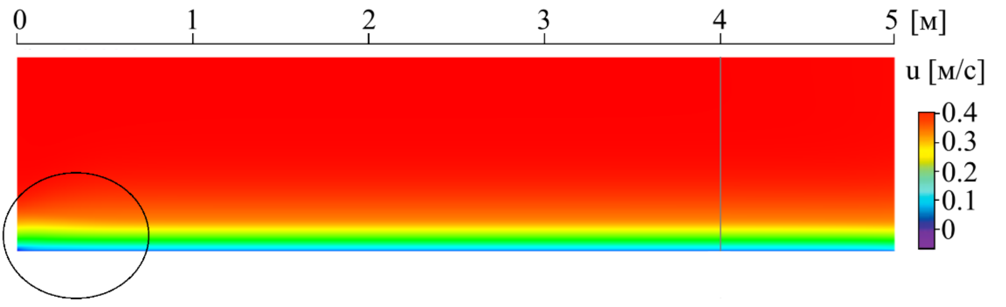

Рис. 4. Распределение горизонтальной скорости в области.
Fig. 4. Distribution of the horizontal velocity in the area.

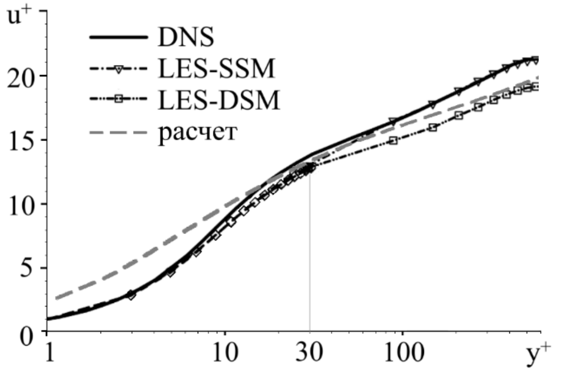

Рис. 5. Профиль горизонтальной скорости.
Fig. 5. Profile of the horizontal velocity.

4. Расчет турбулентного потока над дюнным дном

С помощью предложенной математической модели (1)-(13) в работе выполнено численное моделирование турбулентного потока, проходящего над дюнами ассиметричной формы. Расчетная область показана на рис. 6, в центре области друг за другом располагаются 6 одинаковых дюн. Форма дна канала состоит из трех частей: прямого участка L_1 длинной 30 м, дюнного участка, состоящего из 6-и дюн, идущих друг за другом и имеющих длину L_2 по 0.9 м, и прямого участка L_3 длиной 13.5 м. Форма дюн схематично показана на рис. 7. Дюны имеют пологий напорный склон, область пика (crest), область второго пика (brink) и подветренный склон, который показан на рис. 7 серым цветом. Численное моделирование выполнялось для дюн с углом подветренного склона 10, 20 и 30 градусов. Расчет проводился при следующих параметрах: средняя скорость потока $U_{av} = 0.62$ м/с, глубина потока $H = 0.2$ м, $\mathrm{Re} = 1.24 \cdot 10^5$. Параметры расчета задачи и формы дюн взяты из экспериментальной работы [22]. Расчетная сетка состояла из 60 узлов, расположенных равномерно по вертикали, пространственный шаг $\Delta y = 0.003$ м и 2500 узлов, расположенных равномерно по горизонтали, шаг по времени составлял $\Delta t = 10^{-4}$ с, параметр регуляризации КГД $\tau = 10^{-4}$ с. На рис. 8 показано распределение характеристик потока, проходящего над неподвижными пологими дюнами с углом подветренного склона 10 градусов; в левом столбце показаны расчетные данные, в правом столбце показаны экспериментальные данные [22]. При сравнении расчетных данных с экспериментальными данными, видно их хорошее качественное согласование. Скорости u, v и напряжение τ_{xy} имеют также хорошее количественное согласование с экспериментом, средняя относительная погрешность расчетных полей составляет 3.09%, 26.11% и 12.76% соответственно. При этом расчетные значения кинетической энергии k являются заниженными в 3 раза, что характерно для используемой модели турбулентности [23]. В численном эксперименте авторы не обнаружили постоянной зоны рециркуляции потока за пологими дюнами, что согласуется с экспериментом [22] и экспериментальными работами авторов [24-27].

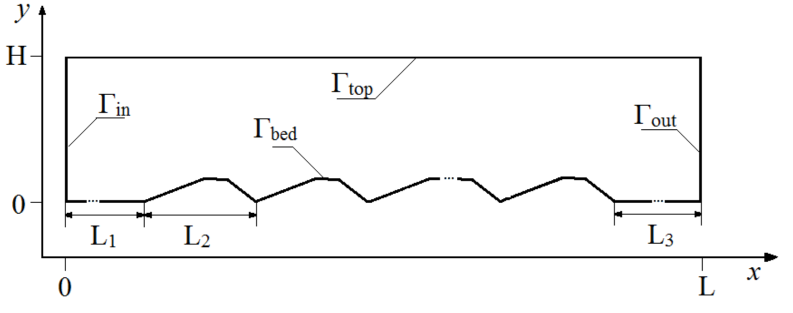

Рис. 6. Расчетная область для задачи об обтекании дюн.
Fig. 6. Calculation domain for the task of the flow past dunes.

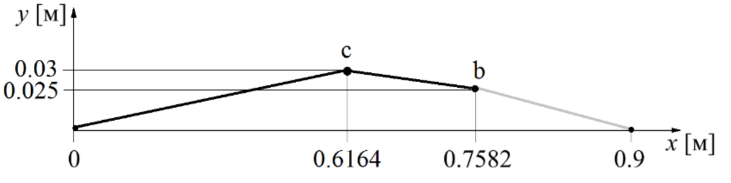

Рис. 7. Форма пологой дюны.
Fig. 7. Low-angle dune form.

На рис. 9а показаны графики осредненного касательного напряжения $\overline{\tau_{xy}}$, которое вычисляется как дважды осредненная над одной дюной касательная компонента напряжения Рейнольдса. На рис. 9а светло-серыми квадратами обозначены расчетные данные, темно-серыми кругами – экспериментальные данные [22], на рис. 9б черными квадратами показаны значения относительной погрешности расчетных данных. По графикам на рис. 9а и 9б видно, что максимальное отклонение расчетного графика от экспериментального наблюдается в области пиков дюны и чуть выше ($0.25 < y < 0.35$ м). По расчетным данным $\overline{\tau_{xy}}$ возрастает в области обоих пиков дюны, а по экспериментальным данным $\overline{\tau_{xy}}$ возрастает в выемке между дюнами. Такое расхождение графиков может объясняться тем, в экспериментальном исследовании учитывались пульсации скорости в потоке, что недоступно для предложенной модели, а также с тем, что часть экспериментальных данных вблизи дна отсутствует (области, где экспериментальные данные отсутствуют, можно увидеть на рис. 8 в виде белой заливки, а также в исходной работе автора [22: P.552, Fig. 5]). В экспериментальном графике осредненные напряжения активно возрастают в нижней половине потока чуть выше пиков дюн, в расчетном графике в данной области напряжения возрастают менее интенсивно. Данный факт говорит о том, что предложенная модель не в достаточной мере описывает распространение возмущений от обтекания пологой дюны в центр потока.

Отметим, что при этом полученные в эксперименте и в расчете максимальные значения $\overline{\tau_{xy}}$ близки по значению и в целом расчетный график хорошо согласуется с экспериментальным, средняя относительная погрешность составляет 8.4 %.

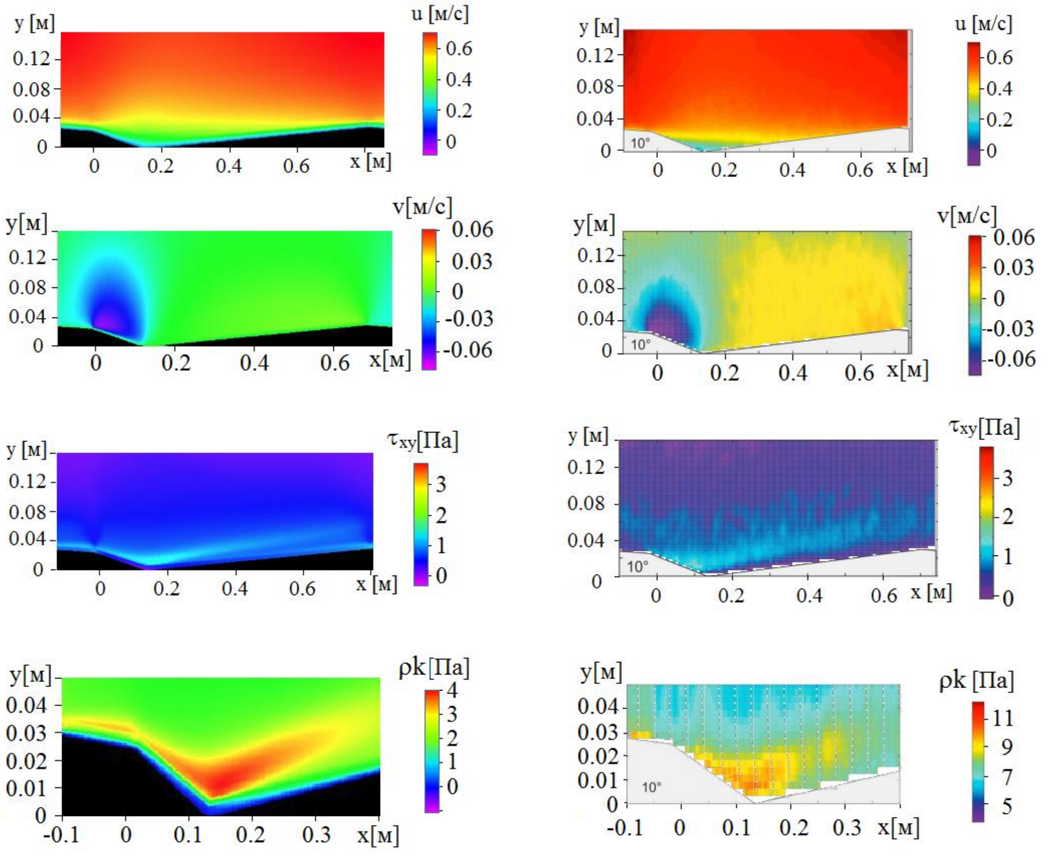

Рис. 8. Расчетные (слева) и экспериментальные (справа) поля горизонтальной и вертикальной скоростей потока, напряжений Рейнольдса и кинетической энергии турбулентности при обтекании пологих дюн.
Fig. 8. The predicted (left) and experimental (right) fields of horizontal and vertical velocities, Reynolds stress and kinematic turbulence energy of the flow past low-angle dunes.

В работе также выполнено сравнение общего касательного напряжения τ_T , так как данная характеристика часто используется в практических расчетах больших участков рек для учета сопротивления, которое вносится в поток дюнами на дне [28, 29]. Общее касательное напряжение на дне τ_T вычислялось путем линейной экстраполяции $\overline{\tau_{xy}}$ в верхней части канала ($y > 0.1$ м) на дно, как это выполнено у автора [22]. На рис. 9а линии экстраполяции показаны пунктирными линиями соответствующего цвета, значения $\overline{\tau_{xy}}$, по которым производилась экстраполяция, обозначены фигурами с черным контуром. Таким образом, экспериментальное $\tau_T = 0.85$ Па, расчетное $\tau_T = 0.81$ Па, погрешность вычисления τ_T достаточно мала и составляет 4.7 %, что позволяет использовать предложенную модель для расчета движения потока по размываемой донной поверхности с дюнными донными формами.

С помощью предложенной модели в работе выполнено моделирование турбулентного гидродинамического потока в такой же расчетной области, как в предыдущем случае, но с дюнами средней крутизны, угол подветренного склона которых равен 20 градусам, геометрия дюны показана на рис. 10.

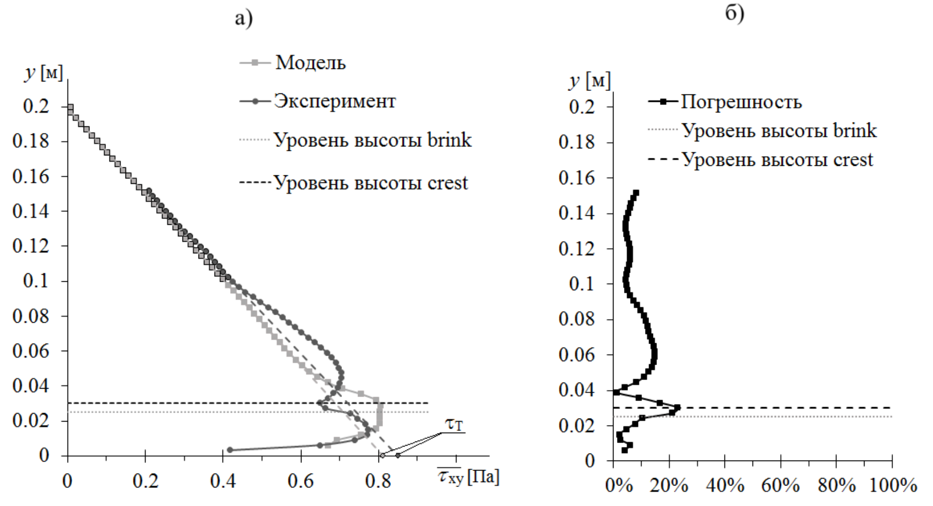

Рис. 9. Осредненное над одной пологой дюной касательное напряжение (а) и относительная погрешность его вычисления по предложенной модели (б).
Fig. 9. Shear stress averaged over one low-angle dune (a), and relative error of its calculation by the proposed model.

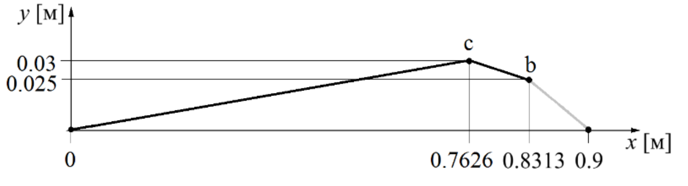

Рис. 10. Форма дюны средней крутизны.
Fig. 10. Middle-angle dune form.

На рис. 11 в левом столбце показаны результаты численного моделирования, в правом столбце – соответствующие экспериментальные данные из работы [22]. При сравнении полей горизонтальной скорости видно, что в численном эксперименте за дюной наблюдается небольшая зона рециркуляции потока, она составляет около 0.007 м в диаметре. Авторы экспериментальной работы [22] постоянной зоны рециркуляции потока за такими дюнами не обнаружили, но они указывают, что зона рециркуляции потока может находиться у подножья дюны, где экспериментальные измерения выполнить не удалось. При сравнении всех расчетных характеристик потока с экспериментальными данными видно их хорошее качественное и количественное согласование, средняя относительная погрешность для u равна 4.68%, для v – 34.02%, для τ_{xy} – 15.56%. Расчетная кинетическая энергия турбулентности k чуть лучше согласуется с экспериментом, чем в случае обтекания потоком 10-градусных дюн, средняя относительная погрешность составляет 42.33 %.

На рис. 12а показано распределение осредненного сдвигового напряжения Рейнольдса $\overline{\tau_{xy}}$ для случая обтекания потоком дюн средней крутизны, светло-серыми квадратами обозначены расчетные данные, темно-серыми кругами – экспериментальные данные [22], на рис. 12б черными квадратами показано распределение относительной погрешности расчетных данных $\overline{\tau_{xy}}$. При сравнении графиков на рис. 12а видно их хорошее качественное и количественное согласование. Как и в случае обтекания пологой дюны, максимальное отклонение расчетного профиля от экспериментального наблюдается в нижней части потока над пиком дюны ($0.3 < y < 0.5$ м), погрешность расчета здесь достигает 37 %, во всей остальной области отклонения менее значительны, средняя относительная погрешность расчетного $\overline{\tau_{xy}}$ составляет 12.24 %. Следует отметить, что на рис. 12а на расчетном графике видно присутствие зоны рециркуляции потока, напряжения принимают отрицательные значения. Полученное по расчетным данным общее касательное напряжение $\tau_T = 1.0$ Па, по экспериментальным данным – $\tau_T = 1.05$ Па, таким образом погрешность вычисления общего касательного напряжения для средних дюн по предложенной модели оставляет 4.76 %.

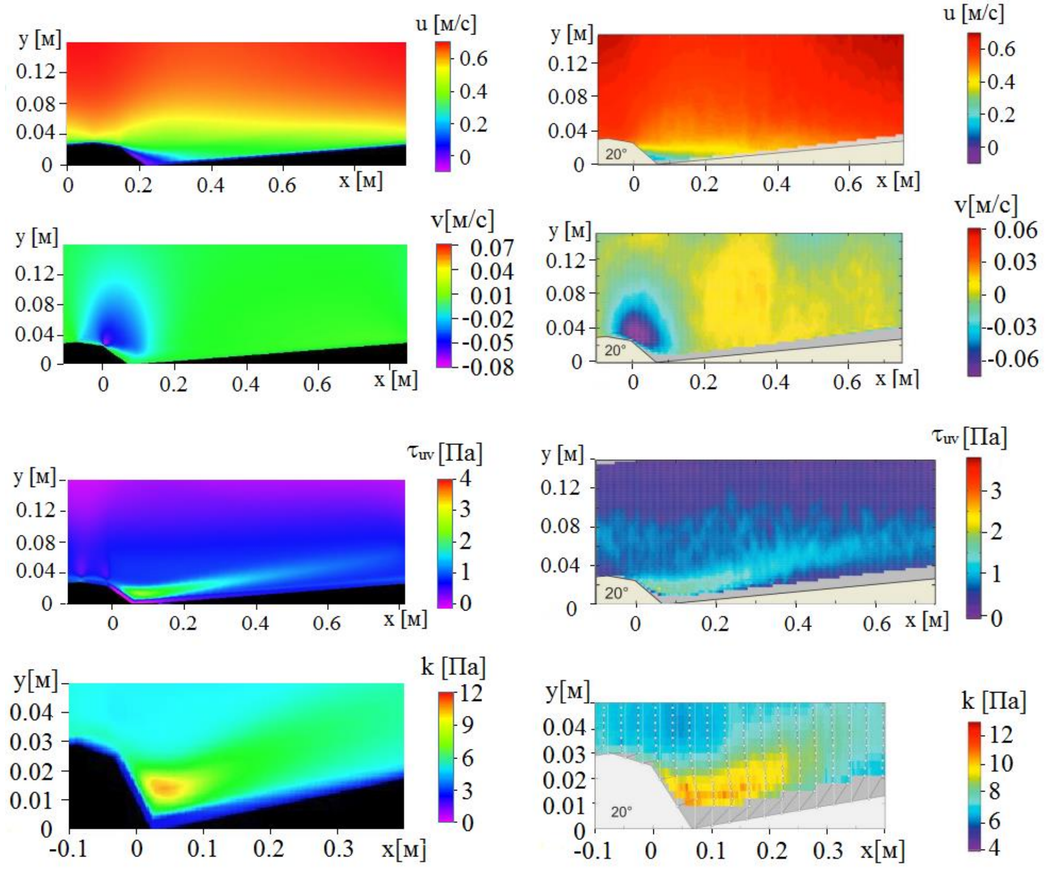

Рис. 11. Расчетные (слева) и экспериментальные (справа) поля горизонтальной и вертикальной скоростей потока, напряжений Рейнольдса и кинетической энергии турбулентности при обтекании дюн средней крутизны.
Fig. 11. The predicted (left) and experimental (right) fields of horizontal and vertical velocities, Reynolds stress and kinematic turbulence energy of the flow past middle-angle dunes.

Для случая обтекания потоком крутых дюн с углом подветренного склона 30 градусов также был выполнен численный эксперимент. Как и в предыдущем эксперименте, расчетная область оставалась прежней, только изменена форма дюн в центре расчетной области, форма крутой дюны показана на рис. 13.

На рис. 14 в левом столбце показаны результаты численного моделирования течения над крутыми дюнами, в правом столбце – соответствующие экспериментальные данные из работы [22]. На рис. 14 видно хорошее качественное и количественное согласование расчетных и экспериментальных данных для всех рассмотренных характеристик, средняя относительная погрешность для u равна 6.66%, для v – 24.09%, для τ_{xy} – 20.77%., для k – 24.23 %. На рис. 14 видно, что за дюной присутствует зона рециркуляции потока, и ее размер, местоположение и скорость в расчете согласуется с экспериментальными данными [22].

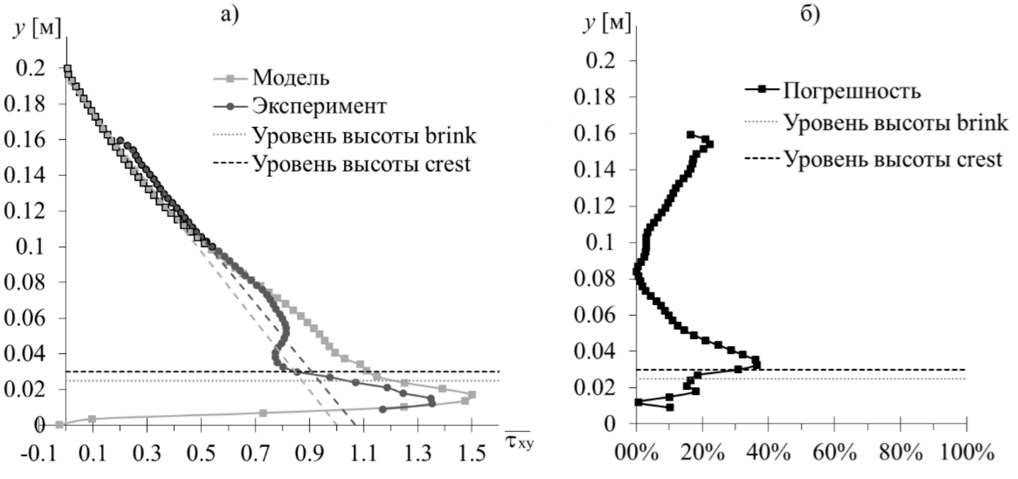

Рис. 12. Осредненное над одной дюной средней крутизны касательное напряжение (а) и относительная погрешность его вычисления по предложенной модели (б).
Fig. 12 Shear stress averaged over one middle-angle dune (a) and relative error of its calculation by the proposed model.

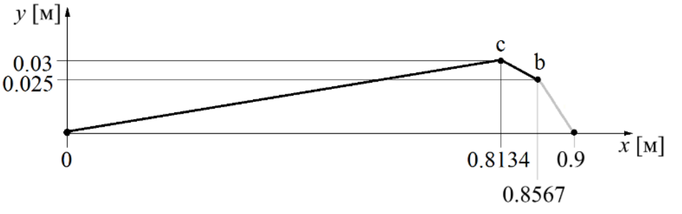

Рис. 13. Форма крутой дюны.
Fig. 13. Steep dune form.

На рис. 15а показано распределение осредненного сдвигового напряжения Рейнольдса $\overline{\tau_{xy}}$ для случая обтекания потоком крутых дюн, светло-серыми квадратами обозначены расчетные данные, темно-серыми кругами – экспериментальные данные [22], на рис. 15б показано распределение относительной погрешности расчетных данных $\overline{\tau_{xy}}$. На рисунках видно, что в целом расчетные напряжения $\overline{\tau_{xy}}$ хорошо согласуются с экспериментом [22], средняя относительная погрешность составляет 20.76%. В рассматриваемом случае максимальное отклонение расчетного графика от экспериментального наблюдается в выемке между дюнами ($y < 0.015$ м). В данной области расчетные напряжения плавно снижаются до отрицательных значений, что отражает наличие зоны рециркуляции потока, экспериментальные напряжения в данной области продолжают расти, а вблизи дна экспериментальные данные не зафиксированы. Такое рассогласование, вероятно, связано с недостаточной густотой сетки у дна, что не позволяет используемой модели корректно описать сильный градиент горизонтальной скорости в области зоны рециркуляции потока. Еще одна область, где расчетный график отклоняется от экспериментального – это верхняя часть потока, причиной этому может быть используемое в модели граничное условие на верхней границе канала. Данные недостатки модели оказали влияние на точность расчетного общего касательного напряжения: расчетное значение $\tau_T = 1.31$ Па, экспериментальное значение – $\tau_T = 1.51$ Па, относительная погрешность составляет 13.25% – это наибольшее значение для всех трех рассмотренных случаев.

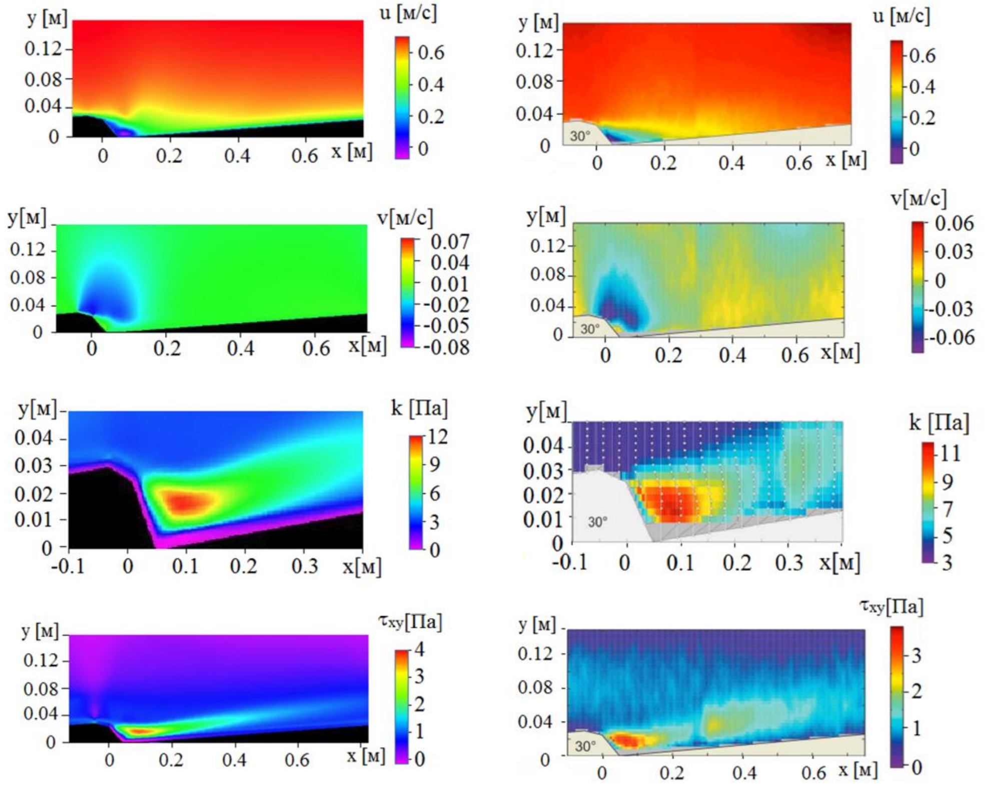

Рис. 14. Расчетные (слева) и экспериментальные (справа) поля горизонтальной и вертикальной скоростей потока, напряжений Рейнольдса и кинетической энергии турбулентности при обтекании крутых дюн.
Fig. 14. The predicted (left) and experimental (right) fields of horizontal and vertical velocities, Reynolds stress and kinematic turbulence energy of the flow past steep dunes.

Таким образом, для получения более точного расчета гидродинамических характеристик потока, проходящего над крутыми дюнами, необходимо пересмотреть граничные условия на верхней границе области и проводить расчеты на более мелких сетках у дна.

4. Заключение

В настоящей работе предложена математическая модель для решения задачи о течении развитого турбулентного потока в канале. Особенностью предложенной модели является нетрадиционный подход к решению уравнений Рейнольдса и уравнений модели турбулентности k-omega, они приведены к квазигидродинамическому виду. Для численного решения уравнений математической постановки использовался комбинированный подход, сочетающий метод контрольных объемов и метод конечных элементов на треугольных адаптивных сетках Выполнена верификация предложенной модели на тестовой задаче о течении гидродинамического потока в канале с ровным дном, показано, что предложенная модель корректно описывает поведение потока в области турбулентного подслоя.

Для дальнейшей верификации модели было выполнено численное решение ряда задач об обтекании турбулентным потоком фиксированных песчаных дюн. Показано, что предложенная модель адекватно описывает движение турбулентного гидродинамического потока над ассиметричными дюнами, имеющими разный угол подветренного склона. Полученные по модели горизонтальные, вертикальные скорости потока и сдвиговые напряжения Рейнольдса качественно и количественно согласуются с экспериментальными данными во всех рассмотренных случаях их погрешность варьируется в пределах 3.09-6.66%, 24.09-34.02% и 8.4-20.76% соответственно.

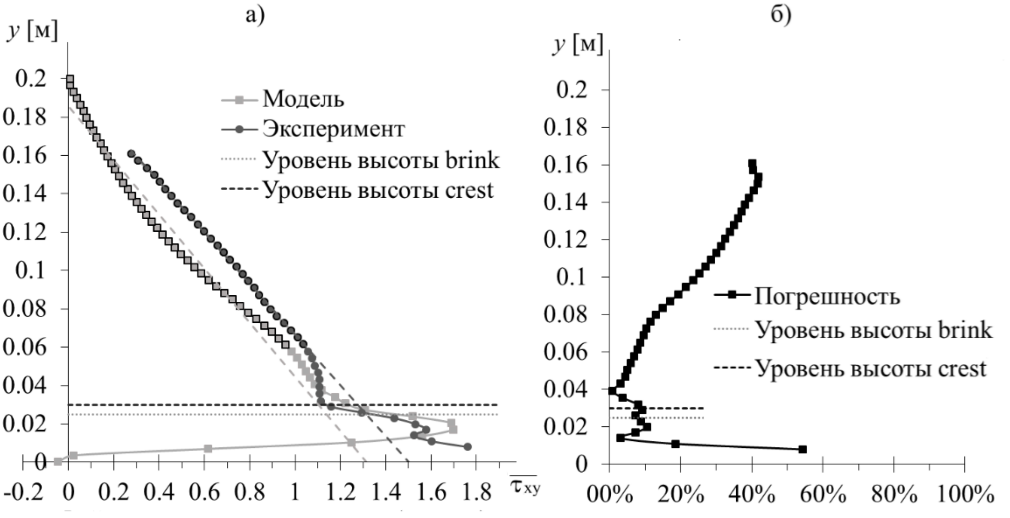

Рис. 15. Осредненное над одной крутой дюной касательное напряжение (а) и относительная погрешность его вычисления по предложенной модели (б).
Fig. 15 Shear stress averaged over one steep dune (a) and relative error of its calculation by the proposed model (b).

В работе показано, что предложенная модель корректно моделирует область за дюной: за пологими дюнами не наблюдается зоны рециркуляции, за дюнами средней крутизны наблюдается непостоянная зона рециркуляции, и за крутыми дюнами наблюдается постоянная зона рециркуляции.

Выявлено, что расчетная кинетическая энергия турбулентности в случае обтекания потоком пологих дюн имеет заниженные значения по сравнению с экспериментом, при этом в случае обтекания потоком крутых дюн значения заниженными не являются. Таким образом, для получения более точных значений кинетической энергии турбулентности необходимо для случая обтекания потоком пологих дюн пересмотреть способ ее расчета.

Значения расчетного общего касательного напряжения согласуются с экспериментом с относительной погрешностью 4.8% для случая обтекания пологих и средних дюн и 13.25% для случая обтекания крутых дюн. Авторы предполагают, что для повышения точности расчета общего касательного напряжения в последнем случае необходимо использовать другое граничное условие на верхней стенке канала. Несмотря на это, полученные по предложенной модели значения общего касательного напряжения хорошо согласуются с экспериментом, следовательно, предложенная модель может применяться для расчета гидравлического сопротивления, оказываемого на поток различными донными формами, и последующего расчета размыва донной поверхности.

Список литературы / References

[1]. Liakopoulos A.; Palasis A. Turbulent Channel Flow: Direct Numerical Simulation-Data-Driven Modeling. Fluids, 2024, vol. 9, issue 62. 10.3390/fluids9030062. DOI: 10.3390/fluids9030062.

[2]. Hoyas S., Oberlack M., Alcántara Ávila F., Kraheberger S., Laux J. Wall turbulence at high friction Reynolds numbers // Physical Review Fluids, 2022, 7. DOI: 10.1103/PhysRevFluids.7.014602.

[3]. Freire L. S., Chamecki M. Large-Eddy Simulation of smooth and rough channel flows using a one-dimensional stochastic wall model. Computers & Fluids, 2021, vol. 230, 105135. DOI: 10.1016/j.compfluid.2021.105135.

[4]. Hoque M. A., Mallik M. S. I., Hossain M. S, Gope R. Ch., Uddin Md. A. Large eddy simulation of a turbulent channel flow using dynamic Smagorinsky subgrid scale model and differential equation wall model, \\ International Journal of Thermofluids, vol. 22, 2024, 100676. DOI: 10.1016/j.ijft.2024.100676.

[5]. Yusuf S. N. A., Asako Y., Che Sidik N. A., Mohamed S. B., Aziz Japar W. M. A. (2020). A Short Review on RANS Turbulence Models // CFD Letters, 2020. vol. 12, no. 11. pp. 83-96. DOI: 10.37934/cfdl.12.11.8396.

[6]. Liu L., Ahmed U., Chakraborty N. A Comprehensive Evaluation of Turbulence Models for Predicting Heat Transfer in Turbulent Channel Flow across Various Prandtl Number Regimes. Fluids 2024, 9, 42. DOI: 10.3390/fluids9020042.

[7]. Елизарова Т.Г., Калачинская И.С., Ключникова А.В., Шеретов Ю.В. Расчет конвективных течений на основе квазигидродиамических уравнений. Проблемы математической физики. М., Диалог МГУ, 1998, С. 193–208. Доступно по ссылке: https://elizarova.imamod.ru/_media/1998vychmat.pdf / Elizarova T.G., Kalachinskaia I.S., Kluchnikova A.V., Sheretov Yu. V. Calculation of convective flows based on quasi-hydrodynamic equations. Problems of Mathematical Physics. Moscow, MGU Dialogue, 1998, pp. 193-208. Available at: https://elizarova.imamod.ru/_media/1998vychmat.pdf (in Russian).

[8]. Снигур К.С. Математическое моделирование русловых процессов в каналах с песчано-гравийным основанием: дисс. … канд. физ.-мат. наук, Комсомольск-на-Амуре, 2016, 148 с./ Snigur K.S. Mathematical modeling of riverbed processes in channels with sand-gravel bed. Thesis, Komsomolsk-na-Amure, 2016, 148 p. DOI: 10.13140/RG.2.1.3727.8325/1 (in Russian).

[9]. Елизарова Т.Г., Калачинская И.С., Шеретов Ю.В., Шильников Е.В. Численное моделирование отрывных течений за обратным уступом. Прикладная математика и информатика, Труды факультета Вычислительной математики и кибернетики, М., Макс Пресс, 2003а, Т. 14. С. 85–118. Доступно по ссылке: https://elizarova.imamod.ru/_media/2003mgu1485.pdf / Elizarova T.G., Kalachinskaia I.S., Sheretov Yu.V., Shilnikov E.V. Numerical modeling of separated flows behind a backward-facing step. Applied Mathematics and Computer Science, Proceedings of the Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Moscow, 2003a, vol. 14, pp. 85-118. Available at: https://elizarova.imamod.ru/_media/2003mgu1485.pdf (in Russian).

[10]. Елизарова Т.Г., Милюкова О.Ю. Численное моделирование течения вязкой несжимаемой жидкости в кубической каверне. Журнал вычислительной математики и математической физики, 2003б, Т. 43, № 3, С. 453–466. Доступно по ссылке: https://elizarova.imamod.ru/_media/2003vychmat.pdf / Elizarova T.G., Miliukova O.Yu. Numerical modeling of viscous incompressible fluid flow in a cubic cavity. Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2003b, vol. 43, no.3, pp. 453–466. Available at: https://elizarova.imamod.ru/_media/2003vychmat.pdf (in Russian).

[11]. Wilcox, D.C. Formulation of the k-w Turbulence Model Revisited. AIAA Journal, 2008, vol. 46, no. 11, pp. 2823–2838. DOI:10.2514/1.36541.

[12]. Широков И.А., Елизарова Т.Г. Применение квазигазодинамических уравнений к моделированию пристеночных турбулентных течений. Прикладная математика и информатика, 2016. М.: Изд-во факультета ВМК МГУ, под ред. В.И. Дмитриева. М.: МАКС Пресс, 2016, N 51, 52-80. ISBN 978-5-317-05316-1. Доступно по ссылке: https://elizarova.imamod.ru/_media/2016mgu.pdf / Shirokov I.A., Elizarova T.G. Application of quasi-gas dynamic equations to numerical simulation of near-wall turbulent flows. Computational Mathematics and Modeling, 2017, vol. 28, no.1, pp.37-60. DOI: 10.1007/s10598-016-9344-z.

[13]. Елизарова Т.Г., Серегин В.В. Аппроксимация уравнений квазигидродинамки на треугольных сетках. Вестник Московского университета, Серия 3. Физика. Астрономия, 2005, № 4, С. 15-18.

Available at: https://cyberleninka.ru/article/n/approksimatsiya-uravneniy-kvazigazodinamiki-na-treugolnyh-setkah/pdf / Elizarova T.G., Seregin V.V. Approximation of quasihydrodynamic equations on triangular grids. Moscow University Bulletin, Series 3. Physics. Astronomy, 2005, no. 4, pp. 15-18. Available at: https://cyberleninka.ru/article/n/approksimatsiya-uravneniy-kvazigazodinamiki-na-treugolnyh-setkah/pdf (in Russian).

[14]. Потапов И.И., Снигур К.С., Цой Г.И. О моделировании обтекания пологих песчаных дюн турбулентным потоком // Вычислительные технологии, 2019. – Т. 24, № 6. – С. 99-107. DOI: 10.25743/ICT.2019.24.6.012. / Potapov I.I., Snigur K.S., Tsoy G.I. On the modelling of turbulent flow over low-angle sand dunes. Computational Technologies, 2019, vol. 24, no. 6, pp. 99–107. DOI: 10.25743/ICT.2019.24.6.012. (In Russian).

[15]. Клавен А.Б., Копалиани З.Д. Экспериментальные исследования и гидравлическое моделирование речных потоков и руслового процесса. СПб, Нестор-История, 2011, 504 с. / Klaven A.B., Kopaliani Z.D. Experimental studies and hydraulic modeling of river flows and channel process. Saint-Petersburg, Nestor-History, 2011, 504 p. (in Russian).

[16]. Елизарова Т.Г. Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. Лекции по математическим моделям и численным методам в динамике газа и жидкости. М., Научный Мир, 2007, 350 с. Доступно по ссылке: https://www.imamod.ru/~elizar/_media/course-book.pdf / Elizarova T.G. Quasi-gasdynamic equations and methods for calculating viscous flows. Lectures on mathematical models and numerical methods in gas and liquid dynamics. Moscow, Science World, 2007, 350 p. Available at: https://www.imamod.ru/~elizar/_media/course-book.pdf (in Russian).

[17]. Stigler J. Introduction of the analytical turbulent velocity profile between two parallel plates. 18th International conference Engineering Mechanics, Czech Republic, 2012. Paper No. 148. pp. 1343-1352. Available at: https://www.researchgate.net/publication/280729357_INTRODUCTION_OF_THE_ANALYTICAL_TURBULENT_VELOCITY_PROFILE_BETWEEN_TWO_PARALLEL_PLATES.

[18]. Peng Sh.-H., Davidson L., Holmberg S. The Two-Equation Turbulence k-w Model Applied to Recirculating Ventilation Flows. Chalmer University of Technology Department of Thermo- and Fluid Dynamics: Publ. Nr. 96/13, 1998, 25 p. Available at: https://www.tfd.chalmers.se/~lada/postscript_files/tfd9613.pdf.

[19]. Флетчер, К. Численные методы на основе метода Галёркина. М., Мир, 1988, 353 с / Fletcher C.A.J. Computational Galerkin Methods. In: Computational Galerkin Methods. Springer Series in Computational Physics, 1984, 310 p. DOI: 10.1007/978-3-642-85949-6.

[20]. Луцкий А.Е., Северин А.В. Простейшая реализация метода пристеночных функций. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2013, № 38, 22 с. Доступно по ссылке: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-38 / Lutsky, A.E., Severin, A.V. The minimal realization of the wall functions method. Preprint Keldysh Institute of Appl. Math., 2013, no. 38, 22 p. Availabe at: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-38 (in Russian).

[21]. Королёва (Снигур) К.С., Потапов И.И. Репозиторий исходного кода для задачи расчета гидродинамики и русловых деформаций в речном канале. https://github.com/SnigurKS/RANS-QGD.git (Дата публикации: 31.10.2014, дата обращения: 31.10.2014).

[22]. Kwoll E., Venditti J. G., Bradley R. W., Winter C. Flow structure and resistance over subaquaeous high- and low-angle dunes // Journal of Geophysical Research. Earth Surface, 2016. vol. 121, pp. 545-564. DOI: 10.1002/2015JF003637.

[23]. Stoesser Th., von Terzi D., Rodi W., Olsen N. R. B. RANS simulations and LES of flow over dunes at low relative submergence ratios // Proceedings of the 7th International Conference on HydroScience and Engineering Philadelphia, USA September 10-13, 2006 (ICHE 2006). 13 p. Availabe at: https://researchdiscovery.drexel.edu/esploro/outputs/journalArticle/RANS-simulations-and-LES-of-flow/991014632514604721/.

[24]. Smith J.D., McLean S.R. Spatially averaged flow over a wavy surface // Journal of Geophysical Research, 1977. vol.82, pp. 1735-1746. DOI: 10.1029/JC082i012p01735.

[25]. Sukhodolov A.N., Fedele J.J., Rhoads B.L. Structure of flow over alluvial bedforms: An experiment on linking field and laboratory methods // Earth Surface Processes Landforms, 2006. vol. 31, no. 10, pp. 1292-1310. DOI: 10.1002/esp.1330.

[26]. Shugar D.H., Kostaschuk R.A., Best J.L., Parsons D.R., Lane S.N., Orfeo O., Hardy R.J. On the relationship between flow and suspended sediment transport over the crest of a sand dune, Río Paraná, Argentina // Sedimentology, 2010. vol. 57, no. 1. pp. 252-272. DOI: 10.1111/j.1365-3091.2009.01110.x.

[27]. Bradley R.W., Venditti J.G., Kostaschuk R.A., Church M., Hendershot M., Allison M.A. Flow and sediment suspension events over low-angle dunes: Fraser Estuary, Canada // Journal of Geophysical Research. Earth Surface, 2013. vol. 118, pp. 1693-1709. DOI: 10.1002/jgrf.20118.
[28]. Paarlberg A. J., Dohmen-Janssen C. M., Hulscher S. J. M. H., Termes P., Schielen R. Modelling the effect of time-dependent river dune evolution on bed roughness and stage // Earth Surf. Processes Landforms, 2010. vol. 35, no. 15. pp. 1854-1866. DOI: 10.1002/esp.2074.
[29]. van Rijn L.C. Principles of sediment transport in rivers, estuaries and coastal seas. Amsterdam: Aqua Publications– 1993. 654 p. ISBN: 9789080035621.

Информация об авторах / Information about authors

Ксения Сергеевна КОРОЛЁВА – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории вычислительной механики Вычислительного центра Дальневосточного отделения Российской академии наук, работает в лаборатории с 2010 г. Сфера научных интересов: математическое моделирование русловых процессов для равнинных рек, вычислительная гидродинамика, численные методы, транспорт донных наносов и эволюция донной поверхности во времени.

Kseniia Sergeevna KOROLIOVA – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Senior Reseacher of the Laboratory of Computational Mechanics of Computing Center of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, works in laboratory since 2010 year. Research interests: mathematical modeling of riverbed processes of plane rivers, computational hydrodynamics, numerical methods, bed sediment transport and bed evolution in time.

Игорь Иванович ПОТАПОВ является зав. лаборатории вычислительной механики Вычислительного центра Дальневосточного отделения Российской академии наук с 2009 г. Сфера научных интересов: механика сыпучих сред, механика гетерогенных сред, механика русловых процессов, численные методы, решение систем алгебраических уравнений.

Igor Ivanovich POTAPOV is Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Head of the Laboratory of Computational Mechanics of Computing Center of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences since 2009 year. Research interests: mechanics of bulk environment, mechanics of heterogeneous environment, mechanics of channel processes, numerical methods, solution of systems of algebraic equations.