



Исследование распространения примеси в среде в одной прикладной осесимметричной задаче

^{1,2} Е.А. Михайлов, ORCID: 0000-0002-9747-4039 <e.mikhajlov@lebedev.ru>

³ И.О. Тепляков, ORCID: 0000-0002-2355-1935 <igor.teplyakov@mail.ru>

³ Д.А. Виноградов, ORCID: 0009-0002-1575-9207 <st.zzz@mail.ru>

¹ Физический институт имени П.Н. Лебедева РАН,
Россия, 119991, г. Москва, Ленинский проспект, д. 53.

² Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1.

³ Объединенный институт высоких температур РАН,
Россия, 125412, Москва, Ижорская улица, д. 12, к. 2.

Аннотация. С точки зрения приложений представляет интерес распространение примеси в цилиндрическом объеме, заполненном воздухом низкой плотности. Она связана с испарением вещества из небольшого «стакана», в котором имеют место конвективные течения, связанные с нагревом его дна. Рассмотрено распространение примеси с учетом как диффузии, так и конвективного переноса за счет тепловых процессов внутри «стакана». Распределение скоростей в основном объеме ищется с помощью решения уравнения Навье – Стокса, для примеси решается уравнение переноса с диффузионным слагаемым. Использована конечно-разностная численная схема, реализованная с помощью собственного программного кода. Получены решения в случаях, соответствующих разной высоте стенок «стакана», различным соотношениям между коэффициентами, описывающими процессы конвективного переноса и диффузии. Показано, что высокие стенки существенно препятствуют процессу распространения примеси в основной объем, и вещество в основном концентрируется внутри «стакана», не переходя за его пределы. Данные результаты имеют сходство с данными о переносе одной из компонент векторного потенциала в задаче об усилении в замороженного магнитного поля за счет конвекции в задаче, решавшейся ранее. Обсуждается вопрос о применении данных результатов на практике и их экспериментальной проверке в лабораторных условиях. Отмечено, что в целом распространение примеси соответствует данным, полученным в ходе экспериментальных исследований, проведенных ранее.

Ключевые слова: диффузия; примесь; конвекция; испарение; уравнение Навье–Стокса; параболическое уравнение; конечно-разностные схемы.

Для цитирования: Михайлов Е.А., Тепляков И.О., Виноградов Д.А. Исследование распространения примеси в среде в одной прикладной осесимметричной задаче. Труды ИСП РАН, том 37, вып. 2, 2025 г., стр. 207–216. DOI: 10.15514/ISPRAS–2025–37(2)–15.

Благодарности: Работа И.О.Теплякова и Д.А.Виноградова выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 23-29-00911). Работа выполнена с использованием оборудования Центра коллективного пользования сверхпроизводительными вычислительными ресурсами МГУ им. М. В. Ломоносова.

Research of the Propagation of an Impurity in a Medium in One Applied Axisymmetric Problem

^{1,2} E.A. Mikhailov, ORCID: 0000-0002-9747-4039 <e.mikhajlov@lebedev.ru>

³ I.O. Teplyakov, ORCID: 0000-0002-2355-1935 <igor.teplyakov@mail.ru>

³ D.A. Vinogradov, ORCID: 0009-0002-1575-9207 <st.zzz@mail.ru>

¹ Lebedev Physical Institute of RAS,
Russia, 119991, Moscow, Leninsky prospect 53.

² Lomonosov Moscow State University,
Russia, 119991, Moscow, Leninskie gori, 1.

³ Joint Institute for High Temperatures of RAS,
Russia, 125412, Moscow, Izhorskaya str. 13, bl 2.

Abstract. From the application point of view, the propagation of an admixture in a cylindrical volume filled with low-density air is of interest. It is associated with the evaporation of a substance from a small "glass" in which convective currents associated with the heating of its bottom take place. The propagation of an admixture is considered taking into account both diffusion and convective transfer due to thermal processes inside the "glass". The distribution of velocities in the main volume is sought by solving the Navier-Stokes equation, and the transfer equation with a diffusion term is solved for the admixture. A finite-difference numerical scheme implemented using our own program code is used. Solutions are obtained in cases corresponding to different heights of the "glass" walls, different ratios between the coefficients describing the processes of convective transfer and diffusion. It is shown that high walls significantly impede the process of admixture propagation into the main volume, and the substance is mainly concentrated inside the "glass" without moving beyond its limits. These results are similar to the data on the transfer of one of the components of the vector potential in the problem of amplification of the frozen magnetic field due to convection in the problem solved earlier. Just as there, structures are formed that repeat the features of the flow, and the maximum value is reached on the axis of symmetry. The issue of applying these results in practice and their experimental verification in laboratory conditions is discussed. It is noted that, in general, the propagation of the impurity corresponds to the data obtained in the course of experimental studies conducted earlier.

Keywords: diffusion; impurity; convection; vaporizing; Navier–Stokes equation; parabolic equation; finite-difference scheme.

For citation: Mikhailov E.A., Teplyakov I.O., Vinogradov D.A. Research of the propagation of an impurity in a medium in one applied axisymmetric problem. *Trudy ISP RAN/Proc. ISP RAS*, vol. 37, issue 2, 2025, pp. 207-216 (in Russian). DOI: 10.15514/ISPRAS-2025-37(2)-15.

Acknowledgements. The work of I.O.Teplyakov and D.A.Vinogradov has been supported by Russian Science Foundation (project 23-29-00911). The work was performed using the equipment of the Center for Collective Use of Supercomputing Resources of Lomonosov Moscow State University.

1. Введение

Перенос векторных и скалярных полей в потоке газа представляет большой интерес с точки зрения гидродинамики [1-3]. Он обусловлен действием как конвективного переноса, так и диффузионными эффектами. В случае не очень интенсивной диффузии могут образовываться достаточно интересные структуры, иногда ассоциируемые с коллапсом [4, 5]. Важно отметить, что как правило, особенности возникают на границе конвективных ячеек, а в случае осесимметричных набегающих потоков можно ожидать наличия подобных экстремальных значений на оси симметрии. Достаточно интересные результаты в данном направлении были получены для магнитного поля на границе конвективных ячеек [6]. В случае замороженности в хорошо проводящую жидкость или плазму происходит «сгребание» линий магнитного поля, и как следствие – его локальное усиление. Другим интересным примером является перенос завихренности, которая в случае эйлеровой гидродинамики также является примером замороженного поля. Было показано, что при столкновении двух

разнонаправленных вихрей происходит экспоненциальное нарастание решения в области разделяющего их фронта [7]. Можно предполагать, что аналогичный механизм может объяснять возникновение торнадо и других атмосферных явлений.

Тем не менее, хотя примеры, описанные выше, относятся к векторным полям, аналогичные процессы могут быть характерны и для распространения пассивных скалярных примесей. Так, можно отметить, что в случае задачи о конвективных валах и магнитном поле, по сути, речь шла лишь об одной из компонент векторного потенциала, которая является скалярной функцией [6]. Описывающие ее уравнения качественно схожи с законом распространения пассивной примеси, поэтому логично было бы ожидать при ее решении примерно тех же результатов.

С прикладной точки зрения имеет значение задача об испарении металла, нагреваемого индукционным способом, в разреженный воздух. Подобные процессы интересны при разработке космической техники, позволяя получать импульс в направлении, противоположном потокам образовавшегося пара. С целью исследования данного процесса в ОИВТ РАН был организован эксперимент, в ходе проведения которого были получены оценки для скорости испарения, плотности пара и связанных с этим динамических эффектов. Тем не менее, гидродинамическое описание подобного процесса представляет собой значительные сложности ввиду большого количества факторов.

Экспериментальная установка представляет собой камеру низкого давления (имитирующую космическое пространство), в центре которой расположен цилиндрический тигель, имитирующий рабочую камеру и сопло космического двигателя. Тигель помещен в индуктор, вызывающий разогрев содержимого тигля. В качестве рабочего материала использовался цинк, поскольку температура кипения цинка даже при атмосферном давлении составляет 907°C , а при пониженном (до 1800 Па в эксперименте) $\sim 600^{\circ}\text{C}$, эти температуры легко достижимы. При нагреве цинк испаряется и постепенно происходит процесс его распространения по соплу и по камере низкого давления.

Процесс распространения примеси представляется достаточно сложным и зависит от большого количества факторов, трудно поддающихся учету. Тем не менее, на наш взгляд, для понимания основных закономерностей можно упрощенно представить его следующим образом. При нагреве внутри сопла образуются конвективные потоки. Поле скоростей может быть найдено с помощью решения уравнения Навье – Стокса. После этого можно решать уравнение о переносе примеси как за счет соответствующих потоков, так и за счет диффузионных процессов.

Сформулированная задача представляет собой систему из параболических уравнений в частных производных, которая решалась нами численно. С этой целью нами использовалась конечно-разностная схема, реализованная с помощью собственного программного кода, составленного на языке C++. Создание собственного кода диктуется возможностью изучения наиболее важных для нас эффектов. Так, наш опыт решения задач о возникновении коллапса для магнитного поля показывает [6], что стандартные пакеты могут некорректно описывать быстро растущие решения, плохо воспроизводят их поведение около углов. Численные решения анализировались с целью установить влияние различных процессов на процесс распространения примеси, понимания соотношения между вкладом со стороны диффузии и конвективного переноса. Также интересно изучить соответствие между полученными результатами и тем, что было получено ранее для магнитных полей.

2. Основные уравнения

Как и говорилось выше, будем предполагать, что со дна стакана распространяются пары металла, подогреваемого индукционным способом (рис. 1). За счет этого внутри стакана можно ожидать возникновения конвективных потоков воздуха (хотя он и разрежен, его

плотность существенно превышает плотность паров металла). Их детальное описание может быть достаточно затруднительным.

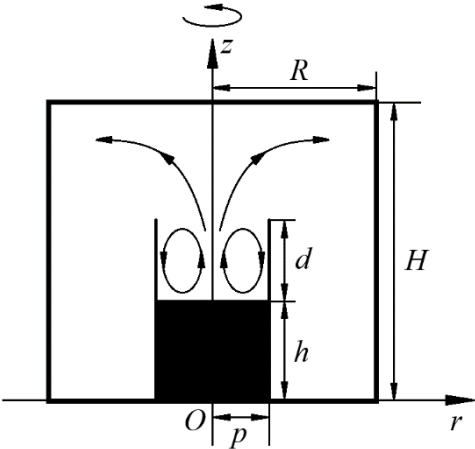


Рис. 1. Цилиндрический сосуд (камера низкого давления) радиуса R и высоты H , внутри которого находится тигель (сопло) высоты d .

Fig. 1. Cylindrical bowl (low pressure chamber) with radius R and height H inside it there is crucible (nozzle) with height d .

Тем не менее, в простейшем приближении можно предполагать, что они характеризуются с помощью скалярной функции тока $\psi(r, z)$ [8], которая должна удовлетворять следующим граничным условиям (предположим, что течения в целом сосредоточены внутри стакана):

$$\psi|_{r=p} = \psi|_{z=0} = \psi|_{z=H} = \psi|_{r=0} = 0 \quad (1)$$

Согласно теореме Стеклова, решение для скалярной функции тока может быть представлено в виде ряда по собственным функциям векторного оператора Лапласа

$\hat{L} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}$, среди которых при установившемся течении ключевую роль будет играть старшая из них [9]:

$$\psi(r, z) \cong V \cdot J_1\left(\frac{r}{p} \mu_1^1\right) \sin\left(\frac{\pi(z-h)}{d}\right), \quad (2)$$

где μ_1^1 - старший из корней функции Бесселя первого порядка $J_1(\bullet)$.

Скорость в таком случае выражается по формуле

$$\vec{v} = \text{rot}(\psi \vec{e}_\varphi), \quad (3)$$

что покомпонентно означает следующее:

$$v_r = -\frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{V\pi}{d} J_1\left(\frac{r}{p} \mu_1^1\right) \cos\left(\frac{\pi(z-h)}{d}\right); \quad (4)$$

$$v_z = \frac{\psi}{r} + \frac{\partial \psi}{\partial r} = V \left(\frac{\mu_1^1}{2d} J_0\left(\frac{r}{d} \mu_1^1\right) + \frac{1}{r} J_1\left(\frac{r}{d} \mu_1^1\right) - \frac{\mu_1^1}{2d} J_0\left(\frac{r}{d} \mu_1^1\right) \right) \sin\left(\frac{\pi(z-h)}{2d}\right) \quad (5)$$

В области над стаканом распределение скорости можно найти с помощью решения уравнений Навье–Стокса (мы предполагаем, что плотность и давление внутри внешней части объема – за пределами «стакана» меняются мало):

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} = \frac{1}{R_1} \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right); \quad (6)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{1}{R_1} \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right); \quad (7)$$

В качестве граничных условий используем следующее:

$$v_r|_{r=0, z>(h+d)} = v_r|_{r=R} = v_r|_{z=0, r>p} = v_r|_{z=H} = 0;$$

$$v_r|_{r<p, z=h+d} = \frac{V\pi}{d} J_1 \left(\frac{r}{p} \mu_1^1 \right);$$

$$v_z|_{r=0, z>(h+d)} = v_z|_{r=R} = v_z|_{z=0, r>p} = v_z|_{z=H} = 0.$$

В начальный момент полагается, что за пределами стакана ($z > h + d$, $r > p$) скорость является нулевой.

Для концентрации мы использовали следующее уравнение переноса с диффузионным слагаемым:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + v_r \frac{\partial q}{\partial r} + v_z \frac{\partial q}{\partial z} = \frac{1}{R_2} \left(\frac{\partial^2 q}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial q}{\partial r} + \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} \right); \quad (8)$$

Граничные условия на стенках полагаются нулевыми (мы предполагаем, что около них происходит процесс конденсации металлического газа:

$$q|_{r=R} = q|_{z=H} = q|_{r=p, z<h+d} = q|_{r=0, z>h} = 0;$$

в то же время на дне «стакана» мы задаем поток среды F :

$$\left. \frac{\partial q}{\partial t} \right|_{z=h, r<p} = F.$$

Начальное распределение для примеси предполагается нулевым: исследуется, как область насыщается ей за счет испарения с поверхности.

Отметим, что задача решается в безразмерных единицах: поэтому интенсивность диссипативных процессов для скорости и для концентрации описывается с помощью безразмерных параметров R_1 и R_2 .

3. Численная схема

Задача решалась с помощью простой конечно-разностной схемы [10]. Мы рассматривали сетку:

$$r_i = i \cdot \Delta r; \quad i = 1, \dots, N; \quad \Delta r = \frac{R}{N};$$

$$z_j = j \cdot \Delta z; \quad j = 1, \dots, M; \quad \Delta z = \frac{H}{M};$$

$$t_k = k \cdot \Delta t; \quad k = 1, \dots$$

С ее точками ассоциируются сеточные значения функций:

$$u_{i,j}^k = v_r(r_i, z_j, t_k) \quad w_{i,j}^k = v_z(r_i, z_j, t_k) \quad q_{i,j}^k = q(r_i, z_j, t_k)$$

Разностные схемы для сеточных функций выглядят так:

$$\begin{aligned} & \frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\Delta t} + u_{i,j}^k \frac{u_{(i+1),j}^k - u_{(i-1),j}^k}{2 \cdot \Delta r} + w_{i,j}^k \frac{u_{i,(j+1)}^k - u_{i,(j-1)}^k}{2 \cdot \Delta z} = \\ & = \frac{1}{R_1} \left(\frac{u_{(i+1),j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{(i-1),j}^k}{\Delta r^2} + \frac{u_{i,(j+1)}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,(j-1)}^k}{\Delta z^2} + \frac{1}{r_i} \frac{u_{(i+1),j}^k - u_{(i-1),j}^k}{2 \cdot \Delta r} - \frac{u_{i,j}^k}{(r_i)^2} \right); \\ & \frac{w_{i,j}^{k+1} - w_{i,j}^k}{\Delta t} + u_{i,j}^k \frac{w_{(i+1),j}^k - w_{(i-1),j}^k}{2 \cdot \Delta r} + w_{i,j}^k \frac{w_{i,(j+1)}^k - w_{i,(j-1)}^k}{2 \cdot \Delta z} = \\ & = \frac{1}{R_1} \left(\frac{w_{(i+1),j}^k - 2w_{i,j}^k + w_{(i-1),j}^k}{\Delta r^2} + \frac{w_{i,(j+1)}^k - 2w_{i,j}^k + w_{i,(j-1)}^k}{\Delta z^2} + \frac{1}{r_i} \frac{w_{(i+1),j}^k - w_{(i-1),j}^k}{2 \cdot \Delta r} \right); \\ & \frac{q_{i,j}^{k+1} - q_{i,j}^k}{\Delta t} + u_{i,j}^k \frac{q_{(i+1),j}^k - q_{(i-1),j}^k}{2 \cdot \Delta r} + w_{i,j}^k \frac{q_{i,(j+1)}^k - q_{i,(j-1)}^k}{2 \cdot \Delta z} = \\ & = \frac{1}{R_2} \left(\frac{q_{(i+1),j}^k - 2q_{i,j}^k + q_{(i-1),j}^k}{\Delta r^2} + \frac{q_{i,(j+1)}^k - 2q_{i,j}^k + q_{i,(j-1)}^k}{\Delta z^2} + \frac{1}{r_i} \frac{q_{(i+1),j}^k - q_{(i-1),j}^k}{2 \cdot \Delta r} \right). \end{aligned}$$

Данная схема является явной, что накладывает достаточно серьезные условия на шаг по времени: $\Delta t < \min(R_1, R_2) \times \min(\Delta r^2, \Delta z^2)$. Кроме того, он также должен удовлетворять условию $\Delta t < \min(\Delta r, \Delta z) \times \left[\max_{r,z} |u| \right]^{-1}$. В противном случае алгоритм будет неустойчивым.

Если же указанные условия выполнены, то в силу того, что разностные уравнения аппроксимируют исходную дифференциальную задачу с точностью до $O(\Delta t + \Delta r^2 + \Delta z^2)$, можно ожидать сходимости [10, 11].

Реализация данной численной схемы осуществлялась с помощью собственного кода, составленного на языке C++. Его наиболее простая версия является свободно доступной [12]. Задача решалась на разных сетках, однако для воспроизведения необходимых нам эффектов оказывается достаточным использования разрешения 500x500. Отметим, что дальнейшее сгущение сетки не приводит к каким-либо значимым изменениям решения в пределах требуемой для нас точности. Более того, наши тестовые расчеты показали, что в отдельных случаях можно добиться приемлемых результатов даже на сетках с разрешением порядка 100x100.

4. Результаты

Расчеты показали, что достаточно быстро, за времена $\max(R_1, R_2) \times \max(L^2, H^2)$ распределение примеси выходит на стационарный режим. По этой причине основное значение имеет именно распределение по пространству.

Сначала мы исследовали, каким будет распределение в предположении отсутствия конвективных потоков ($V = 0$). Результаты показаны на рис. 2 и рис. 3. Можно отметить, что высота тигля существенно влияет на процесс распространения примеси: высокие стенки заметно препятствуют диффузионному процессу. В то же время, при низких стенках происходит достаточно активное распространение металла в газообразном агрегатном

состоянии. Достаточно интересно также изучить влияние более низкой диссипации для скорости (рис. 4).

Включение конвекции приводит к более интенсивному распространению примеси (рис. 5). Тем не менее, гораздо более эффективно оказывается понижение границ тигля: в таком случае можно видеть (рис. 3), что примесь распространяется более активно.

С целью корректности расчета исследовалось поведение интеграла от плотности $M = \iint \rho r dr dz$, ассоциируемого с массой примеси. Согласно физическим представлениям, можно ожидать испарения вплоть до момента насыщения пара, после чего ее масса должна стать постоянной. Результаты для разной высоты границы тигля показаны на рис. 6. Со временем масса примеси выходит на постоянное значение, и не меняется в пределах значащих цифр переменной типа double. Нельзя не отметить, что при высоких границах насыщение происходит раньше.

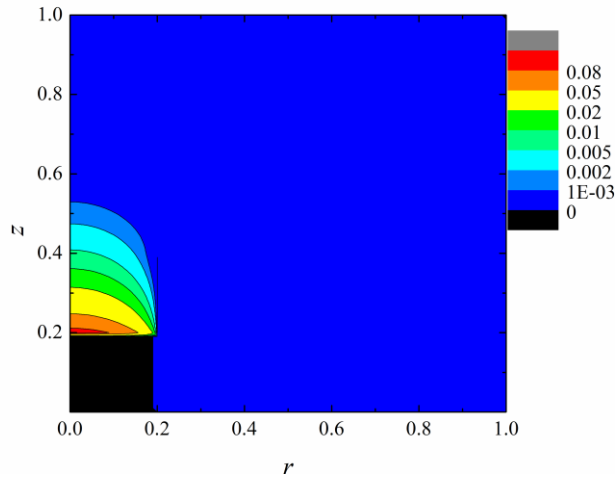


Рис. 2. Распространение примеси при $H = R = 1$, $p = h = d = 0.2$.
Предполагается, что $R_2 = 1$, конвекцией можно пренебречь ($V=0$).
Fig. 2. Spread of impurity for $H = R = 1$, $p = h = d = 0.2$.
It is assumed that $R_2 = 1$, convection is neglected ($V=0$).

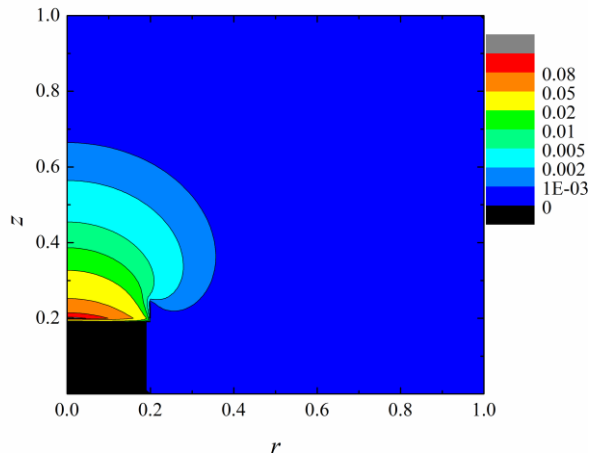


Рис. 3. Распространение примеси при $H = R = 1$, $p = h = 0.2$, $d = 0.05$.
Предполагается, что R_2 бесконечно велико (диссипативное слагаемое отсутствует),
конвекцией можно пренебречь ($V=0$).

Fig. 3. Spread of impurity for $H = R = 1, p = h = 0.2, d = 0.05$.

It is assumed that R_2 is infinitely large (dissipative term is omitted), convection is neglected ($V=0$).

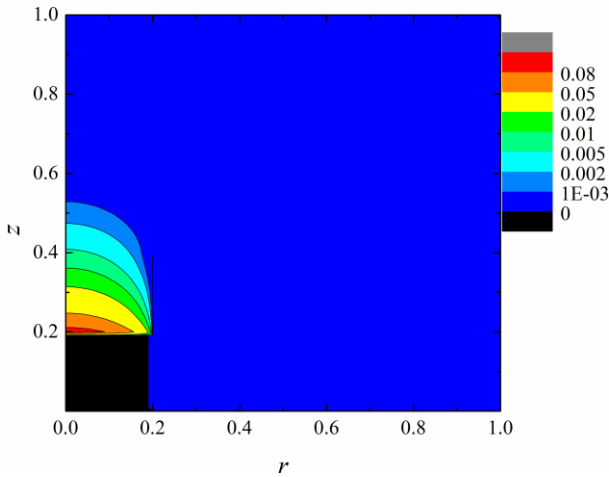


Рис. 4. Распространение примеси при $H = R = 1, p = h = d = 0.2$.

Предполагается, что $R_1 = 1, R_2 = 10, V = 0$.

Fig. 4. Spread of impurity for $H = R = 1, p = h = d = 0.2$. It is assumed that $R_1 = 1, R_2 = 10, V = 0$.

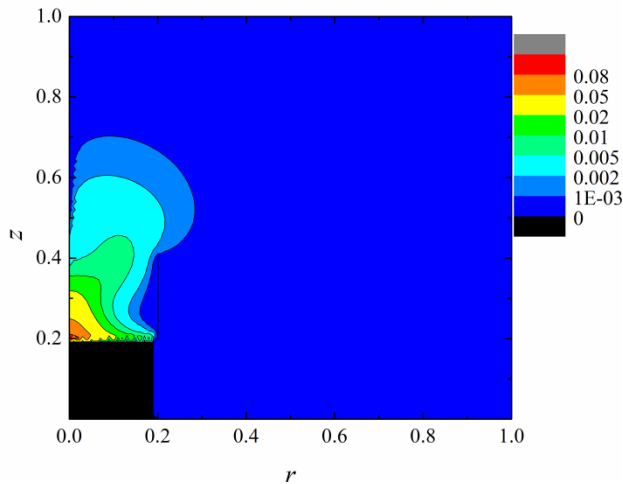


Рис. 5. Распространение примеси при $H = R = 1, p = h = d = 0.2$.

Предполагается, что $R_1 = 1, R_2 = 1, V = 10$.

Fig. 5. Spread of impurity for $H = R = 1, p = h = d = 0.2$. It is assumed that $R_1 = 1, R_2 = 1, V = 10$.

5. Выводы

Нами был проанализирован процесс распространения примеси (паров металла, нагреваемого индукционным способом) в разреженный воздух в цилиндрическом сосуде. Получено, что ключевую роль в распространении играет высота стенок тигля, внутри которого происходит испарение. Что касается конвекции, то ее роль выражена не столь ярко, как это было в случае плоских конвективных валов.

Нельзя не отметить, что схожие задачи решались также другими авторами [13, 14]. Стоит подчеркнуть, что несмотря на наличие стандартных пакетов – как свободно

распространяемых, так и коммерческих – подобные подходы имеют свои преимущества, поскольку есть возможность оптимизировать код для потребностей конкретной вычислительной задачи, учитывая ее особенности и уделяя дополнительное внимание факторам, важным с экспериментальной и прикладной точек зрения.

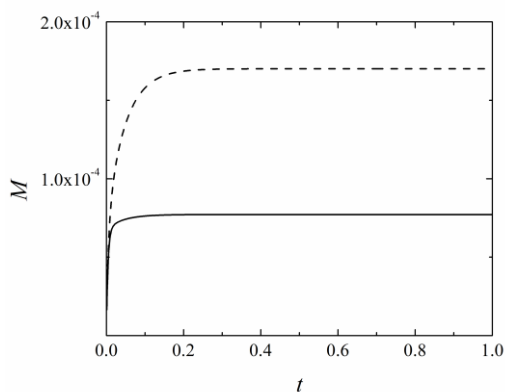


Рис. 6. Масса примеси при различной высоте стенок.

Сплошная кривая показывает $d = 0.2$, пунктирная – $d = 0.05$.

Fig. 6. Impurity mass for different height of border. Solid line shows $d = 0.2$, dashed – $d = 0.05$.

Список литературы / References

- [1]. Chae D. // Handbook of Differential Equations: Evolutionary Equation, ed. by C. M. Dafermos and M. Pokorný. Amsterdam: Elsevier, 2008.
- [2]. Gibbon J. D. The three-dimensional Euler equations: Where do we stand? // Physica D. 2008. V. 237, No. 14–17 P. 1 894–1 904. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2007.10.014>.
- [3]. Кузнецов Е. А., Рубан В. П. Коллапс вихревых линий в гидродинамике // ЖЭТФ. 2000. Т. 118, № 10. С. 893–905.
- [4]. Wolibner, W. Un théorème sur l'existence du mouvement plan d'un fluide parfait, homogène, incompressible, pendant un temps infiniment long. Math Z 1933, 37, 698–726.
- [5]. Kuznetsov, E.A.; Naulin, V.; Nielsen, A.H.; Rasmussen, J.J. Effects of sharp vorticity gradients in two-dimensional hydrodynamic turbulence. Phys. Fluids 2007, 19, 105110.
- [6]. Кузнецов Е. А., Михайлов Е. А. Заметки о коллапсе в магнитной гидродинамике // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 2020. – Т. 158, № 3 (9). – С. 561–572.
- [7]. Кузнецов Е. А., Михайлов Е. А., Сердюков М. Г. Нелинейная динамика проскальзывающих течений // Известия высших учебных заведений. Радиофизика. – 2023. – Т. 66, № 2-3. – С. 145–160.
- [8]. Белевич М.Ю. Гидромеханика. Основы классической теории. СПб., изд. РГМУ, 2006.
- [9]. Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Лекции по математической физике. М., Изд-во МГУ, 1993.
- [10]. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные схемы задач газовой динамики. М., 1992.
- [11]. Калиткин Н.Н. Численные методы. СПб., БХВ-Петербург, 2011.
- [12]. https://gitflic.ru/project/eamsi/impurity_hd.
- [13]. Каминский В.А., Обвинцева Н.Ю., Калачинская И.С., Дильман В.В. Моделирование конвекции Релея в нестационарном процессе испарения // Математическое моделирование. – 2007. – Т.19, № 11. С. 3–10.
- [14]. В.А.Каминский, Н.Ю.Обвинцева. Испарение жидкости в условиях конвективной неустойчивости в газовой фазе // Журнал физической химии. – 2008. – Т.82, № 7. – С. 1368 – 1373.

Информация об авторах / Information about authors

Евгений Александрович МИХАЙЛОВ – доктор физико-математических наук, доцент кафедры математики физического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова с 2022 года, старший

научный сотрудник Физического института имени П.Н. Лебедева РАН с 2021 года. Сфера научных интересов: магнитная гидродинамика, перенос полей в жидкости и газе.

Evgeny Alexandrovich MIKHAILOV – Dr. Sci. (Phys.-Math.), associate professor of chair of mathematics of faculty of physics of Lomonosov Moscow State University since 2022, senior researcher of P. N. Lebedev Physical Institute of RAS since 2021. Scientific interests: magnetohydrodynamics, field transition in fluids.

Игорь Олегович ТЕПЛЯКОВ – кандидат технических наук, старший научный сотрудник Объединенного института высоких температур. Его научные интересы включают магнитную гидродинамику, исследование течений жидких металлов.

Igor Olegovich TEPLYAKOV – Cand. Sci. (Tech.), senior researcher of Joint Institute for High Temperatures of RAS. Scientific interests: magnetohydrodynamics, liquid metals flows.

Дмитрий Андреевич ВИНОГРАДОВ – научный сотрудник Объединенного института высоких температур РАН. Научные интересы: магнитная гидродинамика, тепломассообмен, исследование течений жидких металлов.

Dmitrii Andreevich VINOGRADOV – researcher of Joint Institute for High Temperatures of RAS. Scientific interests: magnetohydrodynamics, heat and mass transfer, liquid metals flows.