

DOI: 10.15514/ISPRAS-2025-37(6)-45



Алгоритм двумерной трассировки лучей как метод препроцессинга для задач с волновыми атTRACTорами

С.А. Елистратов, ORCID: 0000-0002-7006-6879 <sa.elist-ratov@yandex.ru>

Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН,
Россия, 117218, Москва, Нахимовский проспект, 36.

Институт системного программирования им. В.П. Иванникова РАН,
Россия, 109004, г. Москва, ул. А. Солженицына, д. 25.

Аннотация. Гидродинамический расчет атTRACTоров внутренних волн представляет собой довольно трудоемкую задачу с вычислительной точки зрения. Особенностью волновых атTRACTоров является то, что для конкретной геометрии атTRACTор определенного типа формируется лишь для некоторого диапазона частот, что вызывает необходимость провести необходимые процедуры препроцессинга и проверить наличие атTRACTора в выбранной постановке до начала самого расчета. Одним из способов это сделать является метод трассировки лучей, который воспроизводит распространение внутренних гравитационных волн в невязком линейном приближении. В статье рассматривается алгоритм трассировки лучей для широкого спектра профилей стратификации жидкости в достаточно произвольной области. Описываются эффекты, которые необходимо учитывать при применении метода. Приводятся результаты расчетов, включая специальные типы когерентных структур. Предлагается способ оценки скорости сходимости лучей.

Ключевые слова: волновые атTRACTоры; препроцессинг; трассировка лучей; внутренние волны.

Для цитирования: Елистратов С.А. Алгоритм двумерной трассировки лучей как метод препроцессинга для задач с волновыми атTRACTорами. Труды ИСП РАН, том 37, вып. 6, часть 3, 2025 г., стр. 189–202. DOI: 10.15514/ISPRAS-2025-37(6)-45.

2D Ray Tracing Algorithm as a Preprocessing Method for Wave Attractor Problems

S.A. Elistratov, ORCID: 0000-0002-7006-6879 <sa.elist-ratov@yandex.ru>

Shirshov Institute of Oceanology of the Russian Academy of Sciences,
36, Nakhimovskiy ave., Moscow, 117218, Russia.

Ivannikov Institute for System Programming of the Russian Academy of Sciences,
25, Alexander Solzhenitsyn st., Moscow, 109004, Russia.

Abstract. Wave attractor numerical simulation is a costly problem that requires a precise calculation method as well as thorough setup parameters determination. These two facts require using preprocessing methods before CFD simulation. The coherent structure for a geometry and stratification selected will appear in a certain range of perturbation frequencies, which are typically unknown in advance. To check whether the attractor forms, one can run a ray tracing which represents the propagation of internal wave narrow beams in inviscid linear approximation of the Navier-Stokes equations. The current article describes the algorithm that can be used for the ray tracing on a wide class of problems. It is shown that this method is capable to detect specific forms of attractors under specific conditions. Additionally, a ray convergence measure estimation is proposed.

Keywords: wave attractors, preprocessing, ray tracing, internal waves.

For citation: Elistratov S.A. 2D ray tracing algorithm as a preprocessing method for wave attractor problems. *Trudy ISP RAN/Proc. ISP RAS*, vol. 37, issue 6, part 3, 2025, pp. 189-202 (in Russian). DOI: 10.15514/ISPRAS-2025-37(6)-45.

1. Введение

Расчет течений с волновыми аттракторами является непростой задачей и требует выбора достаточно тяжелых вычислительных инструментов для корректного воспроизведения течения. Учитывая, что аттрактор образуется лишь при определенных параметрах задачи [1] вряд ли можно себе позволить перебирать их с помощью решения задач вычислительной гидродинамики (computational fluid dynamics, CFD) – требуется механизм быстрой проверки на наличие аттрактора в системе с определенными характеристиками. В качестве такого инструмента выступает алгоритм трассировки лучей. Этот метод не является тривиальным, однако в большинстве работ [1-12] он считается известным по умолчанию, хотя используется для достаточно простых конфигураций системы. В работе [2] исследуется вопрос о сходимости пучков внутренних волн с математической точки зрения, при том, что это исследование не приближает к построению самого алгоритма. Тем не менее, последнее развитие исследований волновых аттракторов [6-8] требует возможности расширения традиционного подхода на более широкие классы постановок, включая возможность запуска в сложных областях с нелинейной стратификацией.

Отдельно упомянем аналитическое решение, представленное в [5], полученное для класса аттракторов ($n, 1$) в трапецидальной области с линейным профилем стратификации. К сожалению, такой подход не позволяет применять полученное решение для более сложных областей или задач с непостоянной частотой плавучести, равно как и не позволяет делать выводы о скорости сходимости лучей (что в задачах гидродинамики связано с аккумуляцией энергии и образованием неустойчивости), оставляя трассировку лучей едва ли не единственным методом препроцессинга для установления факта наличия и определения формы аттрактора.

Целью настоящей работы является подробное описание метода трассировки лучей в контексте внутренних волн. Поскольку значительная часть исследований посвящена двумерным постановкам, а задачи в неисследованных ранее постановках сначала исследуются в 2D, так как это существенно экономит вычислительные ресурсы, алгоритм трассировки будет рассмотрен также в двумерном случае.

2. Описание алгоритма

В качестве входных параметров принимается следующее:

- a) Параметры постановки:
 1. Частота внешнего возбуждения ω
 2. Геометрия области
 3. Профиль стратификации $\rho(y)$
- b) Параметры численного алгоритма:
 1. Начальная точка (x_0, y_0)
 2. Знаки проекций направления распространения луча на координатные оси (σ_x, σ_y)
 3. Шаг трассировки Δs
 4. Количество итераций N_r
- c) Дополнительные параметры:
 1. Шаг численного дифференцирования границы δ

Технически, вместо профиля стратификации может быть сразу задана частота Брента-Вайсяля $N(y) = \sqrt{-\frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z}}$ (не путать с числом итераций N_r), поскольку профиль $\rho(y)$ в алгоритме используется исключительно для расчета частоты плавучести $N(y)$.

Итерация происходит следующим образом:

1. расчет шага (пересчет координат следующей точки (x_{i+1}, y_{i+1}))
2. проверка условий (см. ниже)
3. перезапись шага, если условия не выполнены

2.1 Свободное распространение пучка

Исходя из линеаризованных уравнений Навье-Стокса с учетом плавучести, пренебрегая конвективным членом в силу его квадратичности по скорости и перемешиванием стратификатора, можно получить следующее дисперсионное соотношение для внутренних волн [13]:

$$\omega/N = \cos \theta$$

где θ – угол между направлением распространения волны (волновым вектором) и направлением гравитации, ω – частота волны. В это соотношение входит не сам волновой вектор, а лишь направление распространения волны, что и позволяет рассчитывать распространение монохроматических волновых пучков. В контексте задач с атTRACTорами в случае ламинарных течений за частоту принимается частота волнопродуктора [14] как частота генерируемой им внутренней волны, поступающей в систему. Отметим, что для режимов с неустойчивостью дисперсионное соотношение неприменимо для вторичных волн, поскольку было выведено в линейном приближении.

Иногда в задачах с атTRACTорами используется немонохроматическое внешнее воздействие (обычно оно воспроизводит приливные явления, которые имеют различные моды [15,16]) – в этом случае трассировка проводится для каждой спектральной компоненты отдельно. Это можно сделать в силу линейности приближения.

Алгоритм расчета выглядит следующим образом (рис. 1):

1. расчет угла:

$$\theta_i = \arccos \left(\frac{\omega}{N(y_i)} \right)$$

2. шаг трассировки:

$$x_{i+1} = x_i + \Delta s \cdot \sigma_x \cos \theta_i$$
$$y_{i+1} = y_i + \Delta s \cdot \sigma_y \sin \theta_i$$

Знаки коэффициентов σ_x и σ_y при свободном распространении пучка остаются неизменными. Такой подход обеспечивает точность $O(\Delta s)$, однако этого оказывается достаточно для установления формы аттрактора. Отметим, что в CFD-расчете когерентная структура всегда будет уширена за счет вязкости [12].

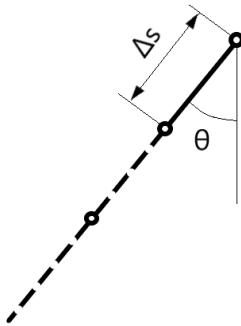


Рис. 1. Схема шага трассировки (свободное распространение луча).
Fig. 1. Ray-tracing step (free ray propagation).

2.2 Отражение

Отражение пучка происходит при невозможности дальнейшего его распространения, то есть либо при выходе за физическую границу области, либо при нарушении требования $\omega < N(y)$, которое является необходимым условием выполнения дисперсионного соотношения в силу ограниченности косинуса.

При отражении от наклонной поверхности возможны два случая в зависимости от соотношения между углом наклона поверхности α и углом распространения волны θ . Для определения угла α (рис. 2) используется численное дифференцирование границы. Если она задана неявной функцией $F(x, y) = 0$, наклон определяется по правилам дифференцирования неявной функции:

$$\alpha = \tan^{-1} \left(-\frac{\partial_y F}{\partial_x F} \right)$$

Заметим, что в числителе и знаменателе стоят именно такие производные, а не наоборот, поскольку α – это угол стенки с вертикалью. При этом следует отдельно проверять $\partial_x F$ на 0, и в этом случае принудительно полагать $\alpha = \pi/2$.

При программной реализации вычисление частных производных может быть заменено численным дифференцированием:

$$\partial_x F \approx \frac{F(x_i + \delta, y_i) - F(x_i - \delta, y_i)}{2\delta}$$
$$\partial_y F \approx \frac{F(x_i, y_i + \delta) - F(x_i, y_i - \delta)}{2\delta}$$

Шаг дифференцирования выбирается одинаковым для обоих направлений. Ясно, что при таком расчете производные имеют точность $O(\delta^2)$, поскольку используется схема центральных разностей; но на практике имеет смысл выбирать шаг дифференцирования δ на несколько порядков меньше шага трассировки Δs [17].

При явном задании профиля границы $y_b(x)$ в целях унификации кода будем использовать неявную функцию $F(x, y) \equiv y - y_b(x)$.

После расчета α пересчет знаков направления луча пересчитывается следующим образом (рис. 2):

1. $\alpha < \theta$: меняется знак σ_x
2. $\alpha > \theta$: меняется знак σ_y

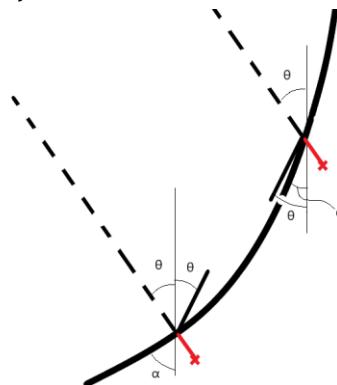


Рис. 2. Отражение луча на границе при различных соотношениях α и θ .
Fig. 2. Ray boundary reflection under different α and θ ratio.

После пересчета знаков необходимо сразу перезаписать результат для текущей точки, а не уходить на следующую итерацию. В противном случае трассировочная кривая будет рассчитана верно, однако это повлияет на оценку скорости сходимости, рассматриваемую ниже.

Кроме указанного простого отражения, возможно возникновение специфической ситуации с точечным аттрактором, когда луч «забивается» в угол и бесконечно увязает в цикле проверок (рис. 3). В этом случае его можно принудительно зафиксировать в угловой точке и прервать трассировку. Альтернативой является измельчение шага Δs , однако на результат это не повлияет и лишь увеличит время работы алгоритма.

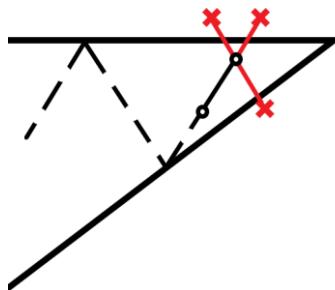


Рис. 3. Остановка трассировки в случае точечного аттрактора.
Fig. 3. Ray-tracing stop while the pointwise attractor has been reached.

Предложенный алгоритм может использоваться при расчете различных постановок. На рис. 4 представлена трассировка для достаточно распространенной постановки в трапецидальной геометрии, заполненной однородно стратифицированной жидкостью. Трассировка позволяет получить различные типы (m, n) аттракторов на разных частотах.

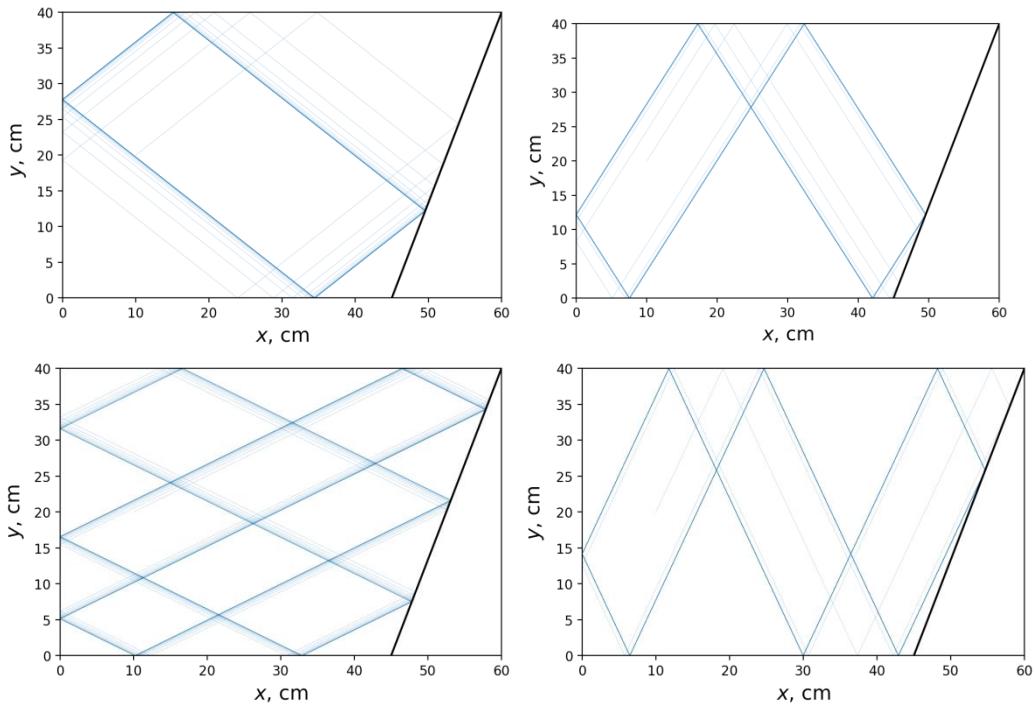


Рис. 4. Скелеты атTRACTоров, полученные трассировкой лучей: трапециoidalная геометрия, линейная стратификация.

Fig. 4. Ray-traced attractor skeletons: trapezoid geometry, linear stratification.

Рис. 5 демонстрирует результаты работы алгоритма в случае нелинейной стратификации. В частности, обнаружена возможность существования атTRACTоров с четным числом отражений по вертикали, что невозможно для линейной стратификации, где фокусировка компенсируется дефокусировкой на наклонной стенке при движении луча в другом направлении по вертикали [7].

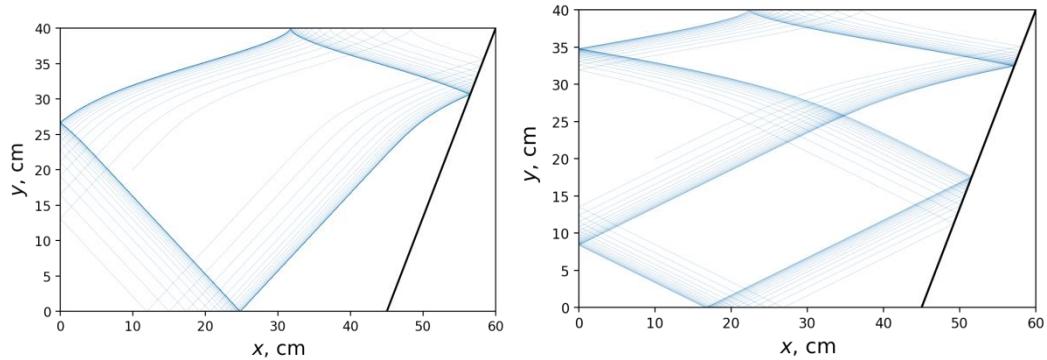


Рис. 5. Скелеты атTRACTоров для стратификации с галоклином.

Fig. 5. Attractor skeletons for a stratification with halocline.

Помимо этого, в средах с нелинейной стратификацией с помощью трассировки лучей обнаружена возможность существования специфического класса атTRACTоров, «запертых» по глубине. Его особенностью является то, что отражение луча происходит не на границах области, а на границе области условия. В этом случае формируются атTRACTоры с большим

числом отражений по горизонтали в области высокого градиента плотности (солености) [6,7]. Трассировка лучей для таких аттракторов показана на рис. 6.

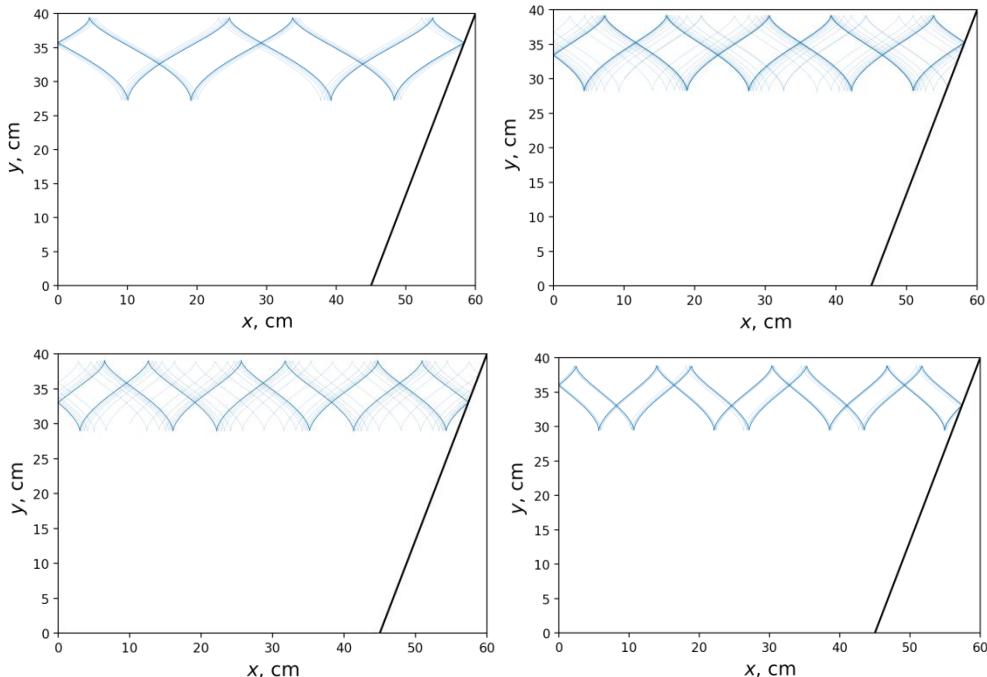


Рис. 6. Аттракторы, запертые по глубине (в области высокого градиента солености).
Fig. 6. Depth-trapped attractors (in the high salinity-gradient region).

Аттракторы в сложных областях демонстрируют специфические эффекты и также являются объектами исследования [8,18]. Предложенный алгоритм трассировки успешно справляется с выявлением аттракторов в таких постановках, что изображено на рис. 7.

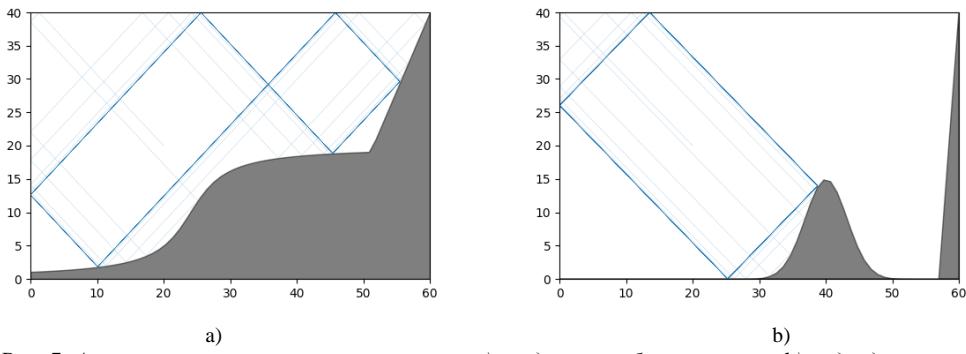


Рис. 7. Аттракторы в сложных геометриях: а) срединно-глубинное плато, б) подводный холм.
Fig. 7. Attractors in complex geometries: a) mid-depth plateau, b) underwater hill.

2.3 Оценка скорости сходимости

При проведении предварительных расчетов также важным оказывается определение скорости сходимости лучей, что в дальнейшем, при проведении моделирования, будет отражаться на степени аккумуляции энергии и, как следствие, образовании неустойчивостей. Традиционно в качестве оценки скорости сходимости лучей выступает показатель Ляпунова [1,2].

По определению это

$$\lambda_L \mid \|(x, y) - (x', y')\| = e^{\lambda_L s} \|(x_0, y_0) - (x'_0, y'_0)\| (\text{при } \|(x_0, y_0) - (x'_0, y'_0)\| \rightarrow 0)$$

Однако следование этому определению приводит к проблемам со сдвигами, обусловленными отражениями. Рассчитать расстояния между ребрами разных периодов не представляется возможным, поскольку требует разделения полной совокупности точек луча на периоды.

Для решения этой проблемы предлагается следующая оценка:

1. Определение максимумов по одной оси
2. Исследование сходимости точек с теми же индексами по другой оси в зависимости от координаты вдоль луча s .

Фактически, это непредельная форма показателя Ляпунова, при которой два луча выпускаются не из произвольных точек, а из соседних точек отражения на верхней границе. Поскольку нас интересует лишь сам показатель, начальное расстояние между ними можно исключить из рассмотрения как мультипликативную константу.

На рис. 8 (а) показана зависимость проекции точки на луче на вертикальную ось и максимумы (оранжевые точки), определенные с помощью встроенного алгоритма `scipy.signal.find_peaks` в `python3`. Рис. 8 (б) отображает те же точки в плоскости $x - y$, видна их сходимость к вершине аттрактора.

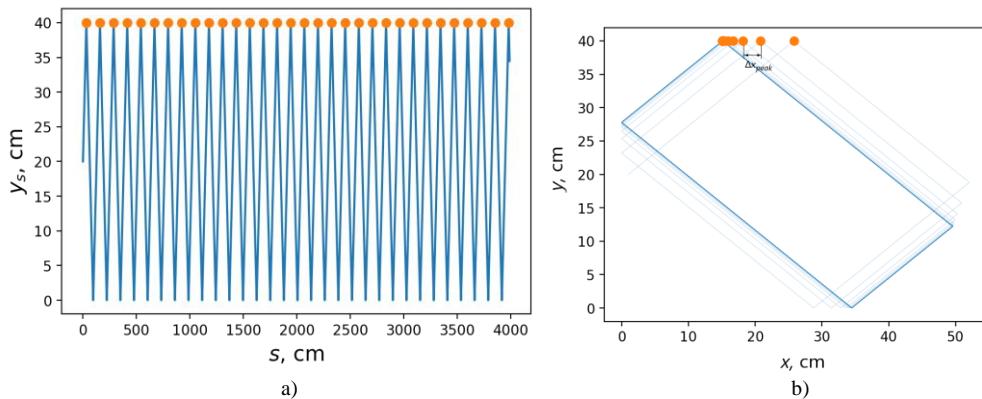


Рис. 8. Определение координат максимумов вертикальной координаты вдоль луча (а) и их сходимость (б).

Fig. 8. Maxima of the vertical coordinate on attractor ray determination (a) and their convergence (b).

Для определения количественной меры сходимости будем рассматривать разности горизонтальных координат определенных на предыдущем этапе точек Δx_{peak} , как показано на рис. 8 (б).

Исходя из предположения об экспоненциальном характере зависимости $\Delta x_{peak}(s)$, в качестве такой меры предлагается использовать показатель экспоненты λ :

$$\Delta x_{peak} \propto e^{\lambda s}$$

Покажем, что такая зависимость обеспечивается экспоненциальной сходимостью самих координат пиков:

$$x_{peak} = x_{peak}^{\infty} + X e^{\lambda' s}$$

$$x_{peak}^{i+1} - x_{peak}^i = X e^{\lambda' s_{i+1}} - X e^{\lambda' s_i} = X e^{\lambda' s_i} (e^{\lambda' (s_{i+1} - s_i)} - 1)$$

Поскольку в области экспоненциальной сходимости $s_{i+1} - s_i \approx \text{const} = L_p$, где L_p – периметр аттрактора, то

$$\Delta x_{peak} = x_{peak}^{i+1} - x_{peak}^i = X'^{e^{\lambda' s_i}},$$

где $X' = X \cdot (e^{\lambda' L_p} - 1) = \text{const}(s)$. Отсюда $\lambda' = \lambda$, что означает, что декремент затухания разностей можно получить как декремент сходимости координат.

Отрицательное значение показателя λ свидетельствует об экспоненциальной сходимости лучей, что можно интерпретировать как аттрактор. Положительное значение означает репеллер.

Рис. 9 иллюстрирует эту зависимость, которая действительно оказывается экспоненциальной. Красная пунктирная линия – аппроксимационная прямая в логарифмическом масштабе (что соответствует экспоненте в линейном), проведенная методом наименьших квадратов. Ее наклон соответствует значению λ .

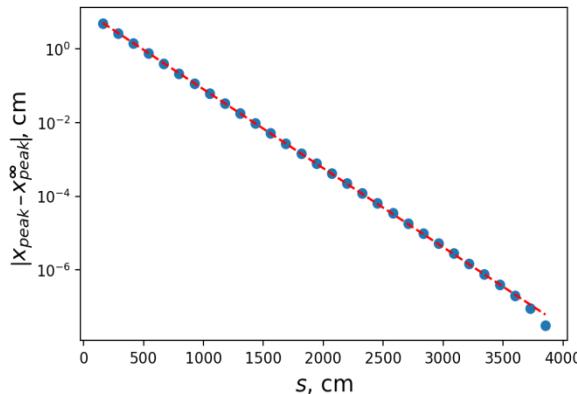


Рис. 9. Показатель сходимости.

Fig. 9. Convergence exponent.

Как можно заметить, предлагаемый подход позволяет не только решить проблему со сдвигами, но и обойтись запуском трассировки от одного начального положения вместо двух, что сокращает время работы.

Несмотря на неплохие результаты, этот метод оказывается неприменим для аттракторов с числом отражений лучей, большим четырех (иначе говоря, в настоящем виде он подходит лишь для обработки аттракторов типа (1,1) [1]). Это обусловлено тем, что на верхней границе происходит больше одного отражения за полный цикл по аттрактору – а это означает, что максимумы y_{peak} формируют несколько подпоследовательностей $x_{peak}^{i_k}$, сходящимся к разным точкам отражения. Для определения декремента λ будет достаточно определить количество отражений на верхней границе n , после чего из последовательности x_{peak} выделить каждую n -ю точку и применить к ней вышеописанные рассуждения. Это можно сделать, поскольку в каждом цикле луч проходит отражения в одной и той же последовательности.

Определить число отражений можно и вручную, однако иногда это бывает сделать невозможно (например, при построении диаграммы Мааса [1], когда требуется запуск значительного числа трассировок). В качестве автоматического способа определения числа отражений рассмотрим спектр быстрого преобразования Фурье FFT(x_{peak}) в зависимости от безразмерной частоты по номерам пиков. В случае аттрактора он имеет максимум в нуле, соответствующий среднему координат отражений, и один максимум, соответствующий частоте смене пределов. По нему можно определить $n = \left\lfloor \frac{1}{f_{max}} \right\rfloor$, где f_{max} – ненулевая частота спектрального максимума, а скобки $\lfloor \cdot \rfloor$ обозначают операцию взятия целой части (см. рис 10).

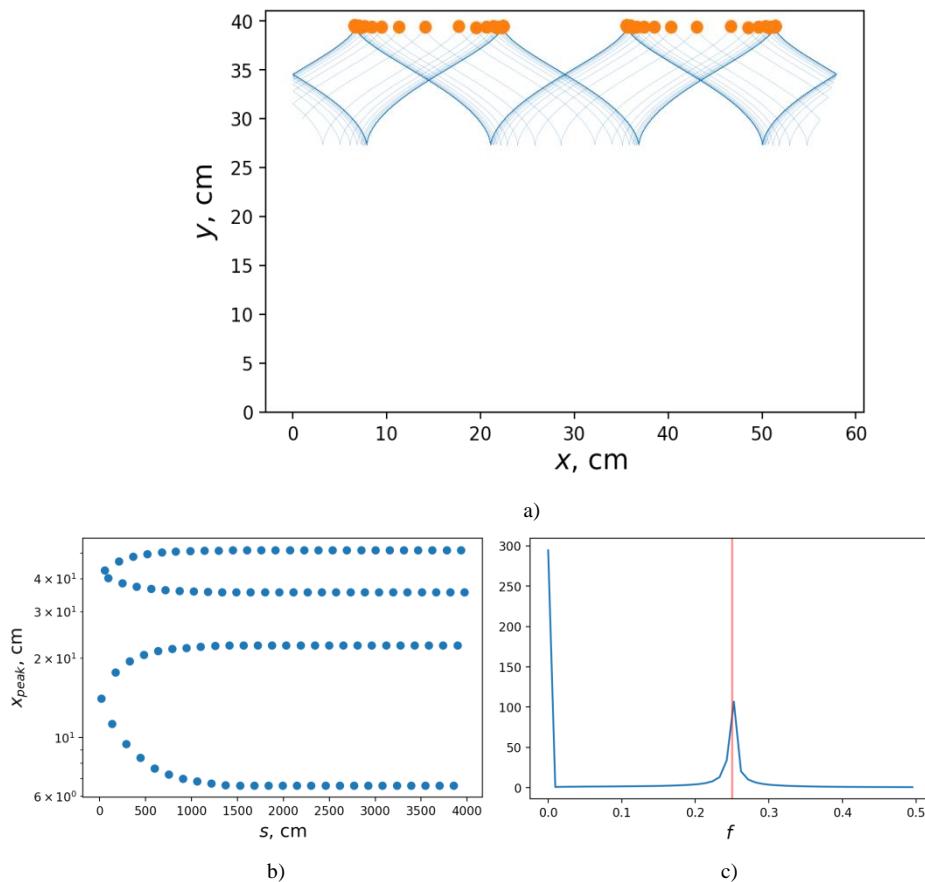


Рис. 10. Обработка сложного аттрактора:

а) выделенные точки отражения лучей на верхней границе,
 б) горизонтальные координаты точек отражения, формирующие несколько сходящихся подпоследовательностей, в) спектр \$x_{peak}\$, красная линия – максимум спектра, используемый при определении числа отражений \$n\$.

Fig. 10. Complex attractor processing: a) reflection points on the upper boundary,

b) reflection points horizontal coordinates, forming several subsequences,

c) \$x_{peak}\$ spectrum, red line marks maximum for reflection number \$n\$ determination.

После выделения подпоследовательности \$x_{peak}^{i_k} = x^{n \cdot i}\$, сходящейся к одной из точек отражения, строится экспоненциальная аппроксимация схождения (рис. 11):

$$x_{peak}^{i \cdot n} - x_{peak}^{\infty} \propto e^{\lambda s_{in}},$$

где в качестве предела \$x_{peak}^{\infty}\$ рассматривается последний член подпоследовательности \$x_{peak}^{i \cdot n_{max}}\$. Наклон аппроксимационной линии в полулогарифмическом масштабе и есть искомый показатель \$\lambda\$.

В табл. 1 представлены типичные значения этой величины для некоторых типов аттракторов для различных профилей соленоиды [7].

В сложных областях возможно наличие сложного аттрактора, состоящего из нескольких компонент связности, но на одной частоте. Такие постановки делают трассировку зависимой

от начального приближения (рис. 12). Тем не менее, это не влияет на оценку скорости сходимости каждой из компонент связности, поскольку предложенная оценка использует только одну трассировочную кривую.

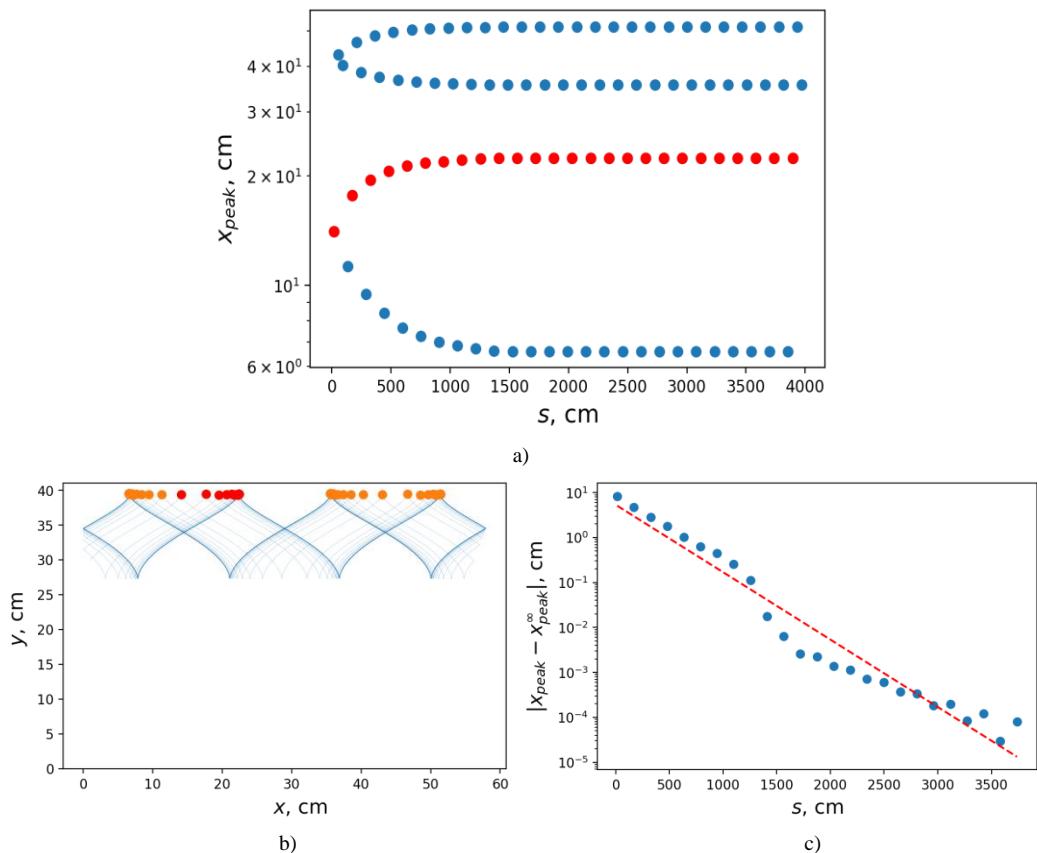


Рис. 11. а) выделенная с помощью спектрального метода сходящаяся подпоследовательность точек отражения (показана красным), б) соответствующие ей точки отражения, и в) аппроксимация сходжения (x_{peak}^∞ обозначен предел).

Fig. 11. a) converging subsequence extracted via the spectral method (red), b) corresponding reflection points, and c) convergence approximation (x_{peak}^∞ is the limit).

Табл. 1. Типичные значения показателя сходимости λ .

Тип аттрактора	λ
(1,1), линейный профиль	-0.0021
(2,1), линейный профиль	-0.0030
(3,1), линейный профиль	-0.0038
(1,1), профиль с галоклином	-0.0040
(4,1), профиль с галоклином, аттрактор в слое	-0.0010
(3,1), профиль с галоклином, аттрактор в слое	-0.0023
(1,1), экспоненциальный профиль	-0.0065
(3,2), экспоненциальный профиль	-0.0017

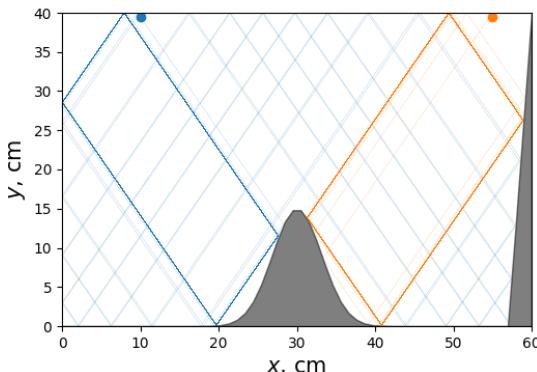


Рис. 12. Аттрактор с несколькими компонентами связности на одной частоте.
Цветные точки отмечают начальные точки трассировки для соответствующих кривых.
Fig. 12. Attractor with several connectivity components at the same frequency.
Colour dots mark the initial points for the corresponding curves.

3. Заключение

В статье рассмотрен алгоритм трассировки лучей применительно к задачам с волновыми аттракторами в двумерной постановке. Он позволяет рассчитывать скелеты аттракторов для широкого класса задач с различными профилями стратификации в различных геометриях. Также предлагается оценка скорости сходимости лучей, использующая всего один шаг трассировки и применимая для аттракторов с произвольным числом граничных отражений. Метод позволяет как рассчитывать скелеты аттракторов в классических постановках, так и находить новые типы когерентных структур при специальных условиях. Описанный алгоритм может использоваться для дальнейших исследований в этой области в качестве метода препроцессинга перед запуском CFD-расчета.

Список литературы / References

- [1]. L.R.M. Maas and F.-P. A. Lam. Geometric focusing of internal waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 300:1–41, 1995.
- [2]. M. Lenci *et al.* Internal-wave billiards in trapezoids and similar tables. *Nonlinearity* 36, 1029, 2023
- [3]. L.R.M. Maas. Wave attractors: linear yet nonlinear. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 15. 2757-2782, 2005. 10.1142/S0218127405013733.
- [4]. G. Pillet *et al.* Internal wave attractors in 3D geometries: A dynamical systems approach. *European Journal of Mechanics – B/Fluids*, 77, 1-16, 2019. 10.1016/j.euromechflu.2019.01.008.
- [5]. I. Sibgatullin, A. Petrov, X. Xu, and L.R.M. Maas. On (n,1) wave attractors: Coordinates and saturation time. *Symmetry*, 14(2), 2022.
- [6]. S.A. Elistratov. Halocline internal wave attractors visualization. *Scientific visualization*, 16(1):82–94, 2024.
- [7]. S.A. Elistratov and I.I. But. Towards the salinity profile influence on an internal wave attractor formation. *Water waves*, 2024
- [8]. S.A. Elistratov and I.I. But. A viscous effect of wave attractor in geometry with underwater peak. *Intelligent Marine Technology and Systems*, 2(15), 2024
- [9]. Сибгатуллин И.Н., Ерманюк Е.В., Ватутин К.А., Рязанов Д.А., Сюй С., 2019, Океанологические исследования, 2019, Том 47, № 1, С. 112–115
- [10]. C. Pacary *et al.* Observation of inertia-gravity wave attractors in an axisymmetric enclosed basin. *Physical Review Fluids*, 8(10), 104802:1-20, 2023. 10.1103/physrevfluids.8.104802
- [11]. J. Hazewinkel *et al.* Observations on the robustness of internal wave attractors to perturbations. *Physics of Fluids*, 22., 2010. 10.1063/1.3489008.

- [12]. C. Brouzet et al. Scale effects in internal wave attractors. *Phys. Rev. Fluids*, 2:114803, 2017.
- [13]. D.E. Mowbray, B.S.H. Rarity. A theoretical and experimental investigation of the phase configuration of internal waves of small amplitude in a density stratified liquid. *Journal of Fluid Mechanics*. 1967;28(1):1-16. doi:10.1017/S0022112067001867.
- [14]. L. Gostiaux et al. A novel internal waves generator. *Experiments Fluids*. 2007, vol. 42, pp. 121-130.
- [15]. D.A. Ryazanov et al. Biharmonic Attractors of Internal Gravity Waves. *Fluid Dynamics*. 2021, 56(3), pp. 403-412.
- [16]. S. Elistratov, I. But. On The Visualization of Subattractor Under Mixed Tidal Forcing. *Scientific Visualization*, 2025, vol. 17(1), 138-149.
- [17]. Н. Н. Калиткин К17. Численные методы: учеб. пособие. 2-е изд., исправленное. СПб.: БХВ-Петербург, 2011, 592 с.: ил. (Учебная литература для вузов).
- [18]. S.A. Elistratov, I.I. But. Wave attractor in basin with underwater step: from discrete to continuous energy spectrum. *Indian J Phys* (2025). <https://doi.org/10.1007/s12648-025-03560-w>.

Информация об авторах / Information about authors

Степан Алексеевич ЕЛИСТРАТОВ – сотрудник Лаборатории цифрового моделирования технических систем Института системного программирования с 2021 года. Сфера научных интересов: волновые аттракторы, вычислительная гидродинамика, численное моделирование.

Stepan Alekseevich ELISTRATOV – employee of the Laboratory of digital modelling of technical systems of the Institute for System Programming of the RAS since 2021. Research interests: wave attractors, CFD, applied math.

