

DOI: 10.15514/ISPRAS-2025-37(6)-46



# Модель размыва правого берега переливной запруды на протоке Пемзенской

Д. И. Потапов, ORCID: 0000-0001-6394-228X <[potapovdi9@mail.ru](mailto:potapovdi9@mail.ru)>

И. И. Потапов, ORCID: 0000-0002-3323-2727 <[potapov2i@gmail.com](mailto:potapov2i@gmail.com)>

Вычислительный центр Дальневосточного отделения Российской академии наук,  
г. Хабаровск, Россия.

**Аннотация.** В работе предложена математическая модель для изучения эрозии берегового склона протоки Пемзенской (река Амур) в районе переливной запруды после формирования и расширения прорана. Проран в переливной запруде образовался из-за размыва правого берега во время половодий 2019–2022 годов. Известно, что время установления гидродинамических параметров потока значительно короче времени изменения его расхода, поэтому поток в районе запруды описывается в рамках квазистационарного приближения. Для моделирования турбулентной вязкости потока используется алгебраическая модель Лео К. ван Рейна. Изменения донных и береговых отметок русла вычисляются с помощью аналитической модели движения наносов, разработанной в трудах Петрова, Потапова (2019). Чтобы предотвратить заиливание прорана при боковом перемещении донного материала с сухого берега, в уравнение донных деформаций введен стоковый член. Этот член регулирует глубину прорана, которая асимптотически стремится к его режимной глубине. Для решения задачи численно разработан алгоритм на основе метода конечных элементов. Выполнено сравнение результатов расчетов береговых деформаций с экспериментальными данными, показавшее их хорошее качественное и количественное согласование. Экспериментальные данные получены из информационной системы «Амур» с открытым исходным кодом.

**Ключевые слова:** русловые процессы; деформации дна; створ русла; информационная система; открытый код; проран переливной запруды; протока Пемзенская; река Амур.

**Для цитирования:** Потапов И. И., Потапов Д. И. Модель размыва правого берега переливной запруды на протоке Пемзенской. Труды ИСП РАН, том 37, вып. 6, часть 3, 2025 г., стр. 203–216. DOI: 10.15514/ISPRAS-2025-37(6)-46.

**Благодарности:** Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда № 24-17-20009 и гранта Правительства Хабаровского края (соглашение № 108С/2024 от 31.07.2024).

# Erosion Model of Overflow Dam Right Bank on the Pemzenskaya Bayou

I. I. Potapov, ORCID: 0000-0002-3323-2727 <[potapov2i@gmail.com](mailto:potapov2i@gmail.com)>

D. I. Potapov, ORCID: 0000-0001-6394-228X <[potapovdi9@mail.ru](mailto:potapovdi9@mail.ru)>

Computing Center of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences,  
Khabarovsk, Russia

**Abstract.** The paper proposes a mathematical model for studying the erosion of the coastal slope of the Pemzenskaya channel (Amur River) in the area of the overflow dam after the formation and expansion of the proran. The proran in the overflow dam was formed due to the erosion of the right bank during the floods of 2019-2022. It is known that the time to establish the hydrodynamic parameters of the flow is much shorter than the time to change its flow rate, therefore, the flow in the dam area is described within the quasi-stationary approximation. The algebraic model of Leo K. Van Rijn is used to model the turbulent viscosity of the flow. Changes in the bottom and shore markings of the riverbed are calculated using an analytical model of sediment movement developed in the works of Petrov and Potapov (2019). In order to prevent siltation of the proran during lateral movement of bottom material from the dry shore, a runoff term is introduced into the equation of bottom deformations. This term regulates the proran depth, which asymptotically tends to its regime depth. An algorithm based on the finite element method has been numerically developed to solve the problem. The results of calculations of coastal deformations were compared with experimental data, which showed their good qualitative and quantitative agreement. The experimental data was obtained from the Amur open source information system.

**Keywords:** channel processes; bottom deformations; channel cross section; information system; open source; overflow dam opening; Pemzenskaya channel; Amur River.

**For citation:** Potapov I.I., Potapov D.I. Erosion model of overflow dam right bank on the Pemzenskaya bayou. *Trudy ISP RAN/Proc. ISP RAS*, vol. 37, issue 6, 2025. pp. 203-216 (in Russian). DOI: 10.15514/ISPRAS-2025-37(6)-46.

**For citation:** This work was supported by the Russian Scientific Fund project No 24-17-20009, and by the Government of Khabarovsk Territory (agreement No 108C/2024 dated 2024/07/31).

## 1. Введение

Изучение процесса эрозии песчаных береговых склонов рек под действием протекающего речного потока является важной прикладной задачей. Первые попытки построения строгих математических моделей для определения формы поперечного сечения русла восходят к работам Гловера [1], Маккавеева [2], Кондратьева [3], в которых были предложены эвристические модели, позволившие получить качественные оценки изучаемого процесса.

Дальнейшее развитие теории было связано с большим количеством экспериментальных работ Икеды [4], Хирано [5], Паркера [6], Питлика [7]. Были предложены математические модели, учитывающие различные механизмы переноса донного материала: транзитного перемещения путем влечения по дну и взвешивания частиц донного материала в речном потоке, напорного движения, медленного гравитационного и лавинного движения донных частиц на береговых склонах Икеды [4], Хирано [5].

В обзорной работе [8] выполнено исследование текущего состояния рассматриваемого вопроса. Основная его идея заключается в том, что при изучении проранов предпочтение отдается профильным [9] или плановым математическим моделям [10] позволяющим моделировать процесс развития проранов.

Кроме того, применение феноменологических формул транспорта донного материала позволяло лишь качественно описывать процессы береговой эрозии. В работах Петрова [11] были предложены и развиты [1] аналитические формулы транспорта донного материала, не содержащие в себе феноменологических коэффициентов.

В работах Бондаренко [12], Потапова [13] предложены математические модели для изучения процессов береговых деформаций русла при постоянном и переменном расходе речного потока в трапециевидных в начальный момент времени каналах.

В данной работе предложена математическая модель задачи о развитии процесса эрозии берегового склона протоки Пемзенской (р. Амур) в створе переливной запруды после возникновения и развития в створе запруды прорана [14], связанного со смытом правого берега запруды в периоды половодий 2019-2022 гг. Поскольку характерное время установления гидродинамических параметров потока много меньше характерного времени изменения его расхода [13], гидродинамический поток в створе запруды описывается в рамках квазистационарного приближения. Тurbулентная вязкость потока описывается алгебраической моделью Лео К. ван Рейна. Для описания изменения донных и береговых отметок русла используется аналитическая модель движения наносов, предложенная в работах Петрова [1, 15, 16]. Для предотвращения заиливания прорана при боковом сходе донного материала с сухого берега в уравнение донных деформаций добавлен стоковый член, который регулирует развитие глубины прорана, асимптотически стремящейся к его режимной глубине.

Для численного решения задачи предложен алгоритм, основанный на методе конечных элементов. Выполнено сравнение результатов расчетов береговых деформаций с данными полевых наблюдений, показавшее их хорошее качественное и количественное согласование.

## 2. Математическая постановка задачи

Рассмотрим задачу о развитии прорана в переливной запруде на протоке Пемзенской р. Амур. Отметки донной поверхности  $\zeta$  и свободной поверхности потока  $\eta$  (определенные на 09.08.2023) для створа, проходящего по гребню запруды, представлены на рис. 1. Левый берег и центральная часть запруды (участок  $L_1$ ), выполненные из крупнообломочной наброски, не подвержены размыванию речным потоком. Рассматривается эрозия правого берега протоки (участок  $L_2$ ).

Предполагается, что в области размыва  $\Omega_2$  русло имеет постоянный малый продольный уклон  $J$  в направлении движения гидродинамического потока и для него выполняются условия малости в отношении глубины потока к его ширине  $H/B \ll 1$ . Геометрия расчетной области  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  и ее границы  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  представлены на рис.1. Граница  $\Gamma_1$  представляет собой смоченную береговую и донную поверхности протоки, граница  $\Gamma_2$  определяет свободную поверхность потока. Граница  $\Gamma_3$  определяет сухую береговую и пойменную поверхности правого берега протоки.

Предполагая, что установившийся поток в створе канала зависит только от координат створа  $y$  и  $z$ , получим уравнение движения потока в створе канала [3, 5, 7]:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \mu_e \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu_e \frac{\partial U}{\partial z} \right) + \rho_w g J = 0, \quad (1)$$

замыкаемое граничными условиями

$$U = 0, \quad (y, z) \in \Gamma_1, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 0, \quad (y, z) \in \Gamma_2, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad (y, z) \in \Gamma_4. \quad (2)$$

Здесь  $U$  – осредненная по Рейнольдсу скорость речного потока в области  $\Omega$ ,  $\mu_e = \mu + \mu_t$ ,  $\mu_t$  – турбулентная вязкость потока,  $\mu$  - молекулярная вязкость потока,  $J$  – уклон речного русла,  $H = \eta - \zeta$  – глубина потока,  $g$  – ускорение свободного падения,  $\eta$  и  $\zeta = \zeta(r)$  – отметки свободной поверхности потока и донной поверхности русла соответственно,  $\rho_w$  – плотность воды.

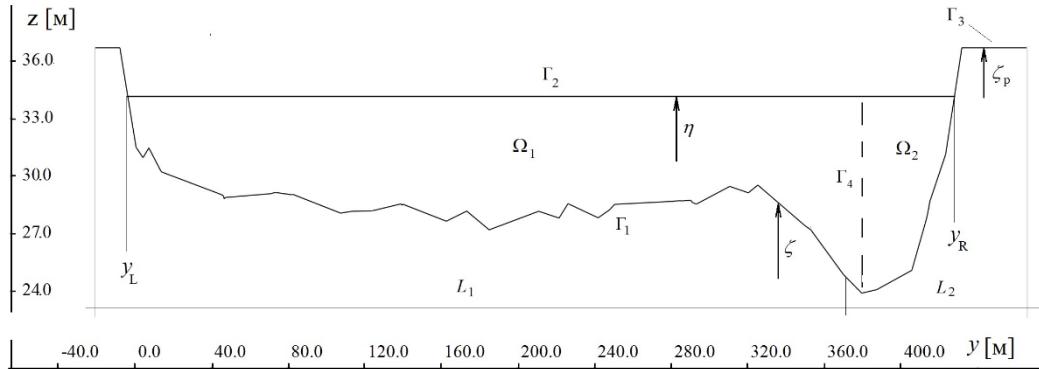


Рис.1. Геометрия расчетной области  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  и ее границы  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ ,  
 $\Gamma_3$  - граница сухого берега,  $\Gamma_4$  - граница псевдо-симметрии.

Fig.1. Geometry of the calculated area  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  and its boundaries  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ ,  
 $\Gamma_3$  - the border of the dry coast,  $\Gamma_4$  - pseudo-symmetry boundary.

Расчетная область  $\Omega$  снизу ограничена подвижной донной поверхностью  $\zeta = \zeta(t, y)$ , эволюция которой описывается уравнением [1]

$$(1-\varepsilon) \frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y} \left( \Lambda_y \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) = -Q_x. \quad (3)$$

Уравнение (3) замыкается начальными и граничными условиями

$$\zeta(0, y) = \zeta_0(y), \quad 0 \leq y \leq W, \quad t = 0, \quad \eta = \eta(0), \quad (4)$$

$$\zeta(y_L, t) = \eta(t), \quad \zeta(y_R, t) = \eta(t), \quad 0 \leq t \leq T_s, \quad (5)$$

В уравнение (3) добавлена правая часть  $Q_x$ , ответственная за режимный баланс донного материала в деформируемом створе русла

$$Q_x = \alpha_H \frac{G_0}{H_0} \max \left( 0, 1 - \sqrt{\frac{T_c}{T}} \right) \left( \frac{(\eta_0 - \zeta) - H_0}{H_0} \right) \left( 1 - \frac{1}{\tan \varphi} \left| \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right| \right)^N, \quad (6)$$

$$H_0 = \frac{\alpha_\theta \rho_b \tan \varphi}{J} d_{50}, \quad (7)$$

где  $\alpha_H = 0.5$ ,  $\alpha_\theta = 1.2$ ,  $N = 6$  – параметры модели,  $H_0$  – режимная глубина невозмущенного запрудой русла [1]. Коэффициенты уравнения донных деформаций (3) определялись по модели [15]:

$$\Lambda = G_0 T \frac{\sqrt{T} - \sqrt{T_c}}{g \rho_w \sqrt{\rho_w} \cos \gamma}, \quad T_c = T_{0c} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2} \right)^{-1} \sqrt{1 - \left( \frac{1}{\tan \varphi} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2}, \quad (8)$$

$$T_{0c} = \frac{8}{9} \frac{\rho_b \tan \varphi}{c_x} \rho_w g d_{50}, \quad G_0 = \frac{16}{15} \frac{1}{\kappa_d \rho_b (\tan \phi)^2}, \quad \rho_b = \frac{\rho_s - \rho_w}{\rho_w}.$$

Здесь  $\eta = \eta(t)$ ,  $\zeta = \zeta(t, y)$  – отметки свободной поверхности потока и донной поверхности русла соответственно,  $T_{0c}$  – критическое придонное касательное напряжение на ровном дне,  $\rho_s$  – плотность песка,  $\varphi$  – угол внутреннего трения донных частиц,  $\gamma$  – острый угол между нормалью к поверхности дна  $\zeta$  и вертикальной линией,  $c_x$  – лобовое сопротивление частиц,  $d_{50}$  – средний диаметр донных частиц,  $\kappa = 0.41$  – коэффициент Кармана,  $\kappa_d$  – коэффициент Кармана для водогрунтовой смеси,  $\zeta_0$  – отметки дна в начальный момент времени.

Задача (1)-(5) замыкается алгебраической моделью турбулентной вязкости Лео К. ван Рейна [17]:

$$\mu_t = \rho \kappa u_* H(y) \begin{cases} \left(1 - \frac{z}{H(y)}\right) \left(\frac{z}{H(y)}\right), & \frac{z}{H(y)} < 0.5, \\ 0.25 & \text{для } \frac{z}{H(y)} \geq 0.5 \end{cases}, \quad u_* = \frac{\kappa U_b}{\ln(z_b / z_0)}, \quad (9)$$

где  $U_b$  – скорость  $U$  на расстоянии  $z_b = 0.05H$  от дна  $z_0 = 0.03k_s$ ,  $k_s$  – эффективная высота шероховатости дна.

Для расчета коэффициентов уравнения (3) вычислялись придонные касательные напряжения

$$T = \rho u_*^2. \quad (10)$$

### 3. Слабая формулировка задачи

Рассмотрим слабую вариационную формулировку Галеркина для задачи (1)-(6) с набором пробных функций  $\{N_\alpha, L_\alpha\} \in L_2(\Omega)$ . В задаче необходимо найти неизвестные функции  $\{U^h, \zeta^h\} \in L_2(\Omega)$ , такие, что:

$$\int_{\Omega} \mu_e \left( \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \frac{\partial U^h}{\partial y} + \frac{\partial N_\alpha}{\partial z} \frac{\partial U^h}{\partial z} \right) d\Omega = \int_{\Omega} N_\alpha \rho g J d\Omega, \quad (11)$$

$$\int_{\Gamma_1} \left( L_\alpha \left( (1 - \varepsilon) \frac{\partial \zeta^h}{\partial t} + Q_x \right) + \Lambda \frac{\partial L_\alpha}{\partial y} \frac{\partial \zeta^h}{\partial y} \right) d\Gamma = 0. \quad (12)$$

Уравнения (11)-(12) замыкаются краевыми условиями

$$U = 0, \quad (r, z) \in \Gamma_1, \quad (13)$$

$$\zeta(y_L, t) = \eta(t), \quad \zeta(y_R, t) = \eta(t), \quad 0 \leq t \leq T_S. \quad (14)$$

Уравнение (12) замыкается начальными условиями

$$\zeta(0, y) = \zeta_0(y), \quad 0 \leq y \leq W, \quad t = 0. \quad (15)$$

#### 4. Дискретный аналог задачи

Используем метод конечных элементов в формулировке Галеркина. Разобьем расчетную область  $\Omega$  на трехузловые конечные элементы  $\Omega_e$ ,  $\Omega = \bigcup_e \Omega_e$ . Введем на конечном

элементе функции формы [18]  $N_\alpha$ :

$$N_\alpha = \frac{1}{2\Omega_e} (a_\alpha + b_\alpha y + c_\alpha z), \quad (16)$$

и их градиенты

$$b_\alpha = \frac{\partial N_\alpha}{\partial y}, \quad c_\alpha = \frac{\partial N_\alpha}{\partial z},$$

здесь  $\begin{cases} a_1 = y_2 z_3 - y_3 z_2, & b_1 = z_2 - z_3, & c_1 = y_3 - y_2, \\ a_2 = y_3 z_1 - y_1 z_3, & b_2 = z_3 - z_1, & c_2 = y_1 - y_3, \\ a_3 = y_1 z_2 - y_2 z_1, & b_3 = z_1 - z_2, & c_3 = y_2 - y_1, \end{cases}$   $\Omega_e = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{bmatrix},$

где  $y_k, z_k$  – координаты вершин (узлов) конечного элемента,  $\Omega_e$  – площадь конечного элемента. Для уравнения донных деформаций расчетную область  $\Gamma_1$  разобьем на двухузловые конечные элементы  $\Gamma_e$ ,  $\Gamma_1 = \bigcup_e \Gamma_e$  с функциями формы  $L_\alpha$ :

$$L_1 = \frac{y - y_1}{h_e}, \quad L_2 = 1 - \frac{y - y_1}{h_e}, \quad h_e = y_2 - y_1. \quad (17)$$

Определим аппроксимацию искомых функций на конечном элементе

$$U^h = N_\alpha U_\alpha, \quad \mu_e^h = N_\alpha \mu_{e\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (18)$$

$$\zeta^h = L_\alpha \zeta_\alpha \quad \alpha = 1, 2. \quad (19)$$

где  $U_\alpha, \mu_{e\alpha}, \zeta_\alpha$  – значения искомых полей в  $\alpha$ -тых узлах конечного элемента, в выражениях (18), (19) и далее ниже по тексту, где это не приводит к неоднозначностям, используется правило суммирования по «немым» узловым индексам ( $N_\gamma U_\gamma \equiv \sum_{\gamma=1}^3 N_\gamma U_\gamma$ ),

$\mu_{e\alpha}$  – значение функции приведенной вязкости в узлах конечного элемента,  $\bar{\mu}_e$  – осредненные величины функции вязкости на конечном элементе.

Используя интерполяцию (16)-(17), преобразуем интегральные тождества (11)-(12) в дискретные аналоги задачи

$$K_{\alpha\beta} U_\beta + F_\alpha = 0, \quad F_\alpha = \rho_w g J \frac{\Omega_e}{3} [1 \ 1 \ 1]^T,$$

$$M_{\alpha\beta}^z = \rho \frac{h_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad K_{\alpha\beta}^z = \frac{\bar{\Lambda}}{h_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q_\alpha = \bar{Q}_x \frac{h_e}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

## 5. Алгоритм решения задачи

В начальный момент времени  $t^0 = 0$  определяется начальная форма донно-береговой поверхности русла в створе  $\zeta^0 = \zeta(t^0, y)$  и отметка свободной поверхности потока  $\eta^0 = \eta(t^0)$ .

Выполним расчет начальной придонной динамической скорости створа

$$u_* = \sqrt{g J R}, \quad R = S_\Omega / P, \quad S_\Omega = \int_{y_L}^{y_R} H(y) dr, \quad P = \int_{y_L}^{y_R} \sqrt{1 + \left( \frac{d\zeta(y)}{dy} \right)^2} dy.$$

Проведем расчет начального поля вязкости для всех  $i$ -х узлов расчетной области  $\Omega^{h,0}$

$$\mu_{ei} = \mu_{ti} + \mu, \quad \mu_{ti} = \rho \kappa u_* H(y_i) \begin{cases} \left( 1 - \frac{z_i}{H(y_i)} \right) \left( \frac{z_i}{H(y_i)} \right), & \frac{z_i}{H(y_i)} < 0.5 \\ 0.25 & \text{otherwise} \end{cases},$$

Выполним следующие циклические действия.

На текущем шаге по времени  $t^n = 0$  определяется начальная форма донных отметок русла в створе  $\zeta_i = \zeta_i(t^n, y)$  и отметка свободной поверхности потока  $\eta = \eta(t^0)$ .

По функциям  $\zeta_i$  и  $\eta$  определяется форма расчетной области  $\Omega = \Omega(t^n)$ , для которой генерируется конечно – элементная сетка  $\Omega^{h,n} = \Omega^h(t^n)$ .

Для каждого  $i$ -го узла донной поверхности (за исключением береговых узлов) с радиус-вектором узла  $\vec{x}_i = (y_i, z_i) \in \Gamma_1^n$  выполним расчет векторов  $(\vec{\tau}_i, \vec{n}_i, \vec{p}_i \text{ и } \vec{p}_i^V)$  и поиск приграничных конечных элементов с функциями формы  $N_\alpha(\vec{p}_i), N_\alpha(\vec{p}_i^V)$

$$\vec{\tau}_i = \vec{x}_{i+1} - \vec{x}_{i-1}, \quad \vec{n}_i = \left( -\frac{\tau_{i2}}{\sqrt{\tau_{i1}^2 + \tau_{i2}^2}}, \frac{\tau_{i1}}{\sqrt{\tau_{i1}^2 + \tau_{i2}^2}} \right),$$

$$\vec{p}_i = \vec{x}_i + h \vec{n}_i, \quad \vec{p}_i^V = \vec{x}_i + h^V \vec{n}_i, \quad h^V = 0.05 H(y_i).$$

Аналогичный поиск конечных элементов с функциями формы  $N_\alpha(\vec{p}_i)$  выполняется для  $i$ -х узлов свободной поверхности  $\vec{x}_i \in \Gamma_2^n$  с векторами

$$\vec{n}_i = (0, -1), \quad \vec{p}_i = \vec{x}_i + h \vec{n}_i,$$

Вычислим скорость  $U_\alpha$

$$\bigcup(K_{\alpha\beta}U_\beta + F_\alpha) = 0,$$

Здесь и далее  $\bigcup[*]$  обозначает операцию сборки локальных конечно – элементных дискретных аналогов задачи в глобальную систему алгебраических уравнений задачи. Вычислим текущую придонную динамическую скорость

$$u_*(y_i)^n = \frac{\kappa N_\alpha(\bar{p}_i^v)U_\alpha}{\ln(h^v/z_0)},$$

Вычислим значения придонных сдвиговых напряжений на границе  $\Gamma_1^n$

$$T = \rho u_*^2$$

Вычислим значения отметок донной поверхности  $\zeta_\alpha^{n+1}$  на текущем шаге по времени

$$\bigcup \left[ \left[ \frac{M_{\alpha\beta}}{\Delta t} + \theta K_{\alpha\beta}^z \right]^n \zeta_\alpha^{n+1} = \left[ \frac{M_{\alpha\beta}}{\Delta t} - (1-\theta) K_{\alpha\beta}^z \right]^n \zeta_\alpha^n + \theta Q_\alpha^{n+1} + (1-\theta) Q_\alpha^n \right]$$

Вычислим коррекцию отметок донной поверхности  $\zeta_i^{n+1}$  на текущем шаге по времени с учетом лавинного обрушения склона

$$\begin{aligned} \zeta_m^n &= \zeta_m^n - \alpha_L \Delta_L, \quad \zeta_{m-1}^n = \zeta_{m-1}^n + \alpha_L \Delta_L \\ \Delta_L &= \begin{cases} r + \Delta \zeta_m^n, & r < -\Delta \zeta_m^n, \\ 0, & r \geq -\Delta \zeta_m^n, \quad r = \Delta x \tan \varphi_m, \end{cases}, \quad \Delta \zeta_m^n = \zeta_m^n - \zeta_{m-1}^n, \quad \alpha_L \approx 0.6. \end{aligned}$$

Определим значение отметки свободной поверхности  $\eta^{n+1}$  на текущем шаге по времени.

Выполним перестроение сеточной области задачи  $\Omega^{h,n+1}$ .

Выполним интерполяцию  $u_*(y_i)^n$  с границы  $\Gamma_1^n$  на границу  $\Gamma_1^{n+1}$

Вычислим значения приведенной вязкости для всех узлов расчетной области  $\vec{x}_i = (y_i, z_i) \in \Omega^{h,n+1}$

$$\mu_{ei} = \mu_{ti} + \mu, \quad \mu_{ti} = \rho \kappa u_*(y_i) H(y_i) \begin{cases} \left(1 - \frac{z_i}{H(y_i)}\right) \left(\frac{z_i}{H(y_i)}\right), & \frac{z_i}{H(y_i)} < 0.5, \\ 0.25 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Изменение текущего времени  $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ , если  $t^{n+1} < t_{end}$  переходим на пункт 1. При  $t^n > t_{end}$  прекращаем расчет.

## 6. Результаты расчетов

Для верификации предложенной математической модели (1)-(10) был проведен ряд вычислительных экспериментов. Расчеты осуществлялись при следующих параметрах:  $\kappa = 0.25$ ;  $\varepsilon = 0.375$ ;  $c_x = 0.4$ ;  $\rho_w = 1000 \text{ кг/м}^3$ ;  $\rho_s = 2650 \text{ кг/м}^3$ .

Параметры донного материала в забронированной части створа  $k_s = 1.1$ ,  $d_{50} = 1$ ,  $\tan \varphi = 3$  (подобласть  $\Omega_1$ ) отличались от параметров в размываемой части створа (подобласть  $\Omega_2$ )  $k_s = 0.1$ ,  $d_{50} = 0.0005\text{m}$ ,  $\tan \varphi = 0.5$ .

Тестовые расчеты проводились на сгущающейся последовательности расчетных сеток с различным размером конечных элементов. Для самой мелкой сетки (рис. 3 в), выбранной в качестве расчетной, средний диаметр конечного элемента составлял около 0.2 м (53543 узла), погрешность по расходу по отношению к предыдущей сетке не превышала 0.0034%.

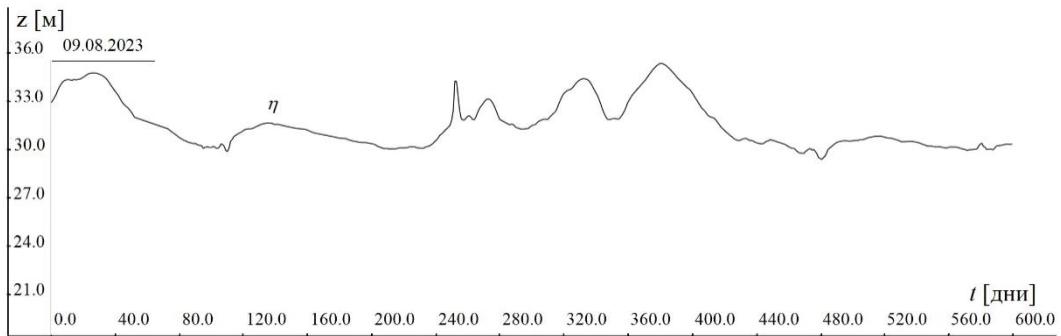
К сожалению, авторы не располагали кривой отметок уровня свободной поверхности над запрудой протоки Пемзенской. Поэтому, для ретроспективного моделирования была выбрана отметка глубины потока на момент натурных наблюдений 09.08.2023 г и сделана привязка данной глубины к уровню р. Амур по гидропосту г. Хабаровска. Уровни данного гидропоста для выбранного периода моделирования приведены на рис. 2.

Расчеты гидродинамического потока в рамках предложенной модели показали значительное занижение поля скоростей в области  $\Omega_1$  над телом переливной запруды и достаточно хорошее согласование расчетных скоростей со скоростями натурных наблюдений в области прорана  $\Omega_2$ . Пример таких расчетов представлен на рис.3. Полученные результаты являются ожидаемыми, поскольку при постановке задачи в створе потока основным требованием является условие малости градиентов скоростей по направлению потока. Данное условие не выполняется в области  $\Omega_1$  и достаточно хорошо выполняется в области прорана  $\Omega_2$ . Поэтому, для расчетов русловых процессов при расчетах полей скорости и турбулентной вязкости в вертикальном створе А-А рис.3 была определена «псевдо – граница русла»  $\Gamma_4$ , на которой задавалось условие симметрии потока (2). Такой подход возможен в силу нескольких причин,

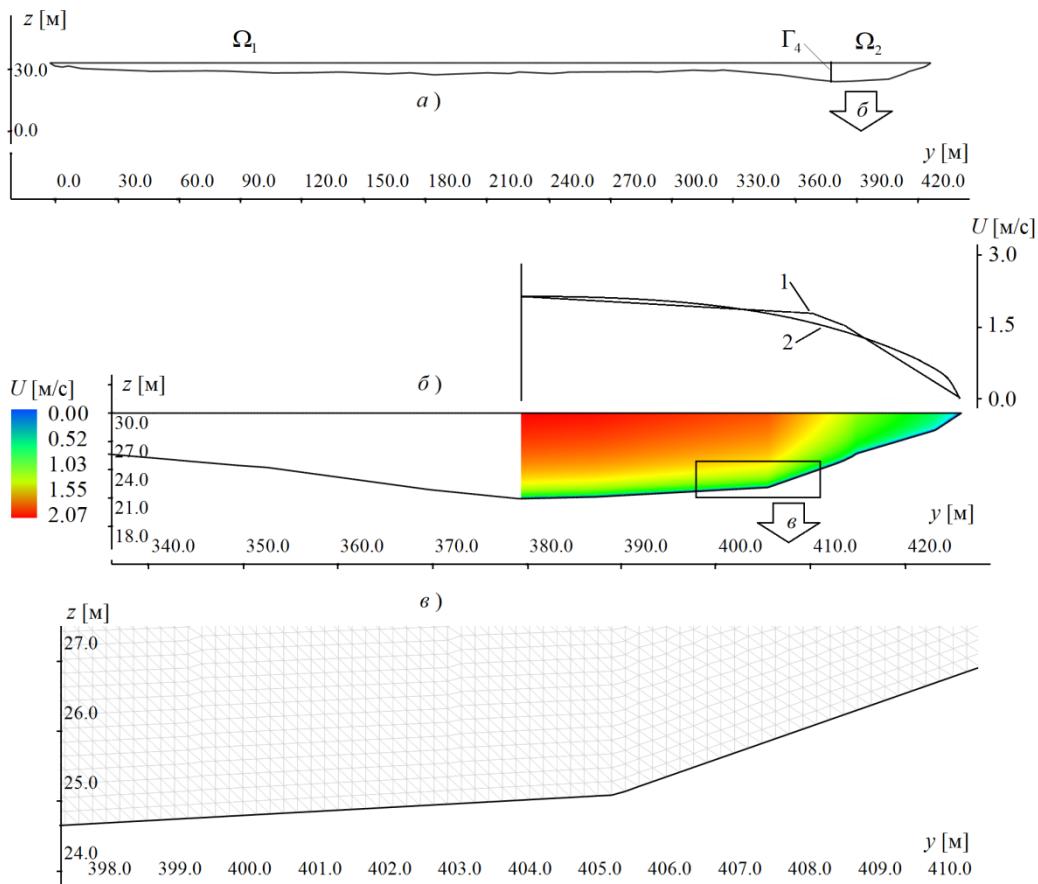
- - дно левой части прорана не является размываемым участком тела запруды;
- - скоростной режим потока в окрестности границы  $\Gamma_4$  близок к гидростатическому;
- -скоростной поток над телом запруды не является установившимся и его расчет по предлагаемой модели не будет правильным. Следовательно, введение псевдо – границы  $\Gamma_4$  может считаться оправданным, поскольку различие измеренных (рис.3. кривая 1) и расчетных (рис.3. кривая 2) скоростей на свободной поверхности потока в области  $\Omega_2$  не превышает 9 %.

На рис. 4 представлены профили донных отметок створа, полученные в результате полевых исследований в период с 13 августа 2019 года по 15 июня 2025 года, обозначенные кривыми 1–5. Точность эхолота, используемого для измерений донных отметок, составляла 0.05 м, точность GPS-приемника при определении плановых координат составляла 1.5-2 м.

В период с 13 августа 2019 года по 9 августа 2023 года процесс углубления прорана в теле запруды характеризовался ярко выраженной нестационарностью (см. рис. 5), и его глубина не достигла уровня верхнего и нижнего бьефов. В связи с этим применение предложенной в данной работе модели для анализа данного процесса было невозможно. Однако в 2023 году глубины верхнего и нижнего бьефов в районе прорана сравнялись, что позволило применить разработанную модель для расчета эрозии правого берега протоки.



*Рис.2. Отметки уровня р. Амур в Балтийской системе высот по Хабаровскому гидропосту.*  
Fig.2. Amur River level markers in the Baltic elevation system at the Khabarovsk Hydroelectric station.



*Рис.3. а) распределение расчетных скоростей в области  $\Omega_2$  створа переливной запруды,  
б) измеренные (кривая 1) и расчетные (кривая 2) значения поверхностных скоростей в створе,  
в) фрагмент расчетной сетки.*

Fig.3. a) distribution of calculated velocities in the area  $\Omega_2$  of the overflow dam, b) measured (curve 1) and calculated (curve 2) values of surface velocities in the reservoir, c) a fragment of the computational grid.

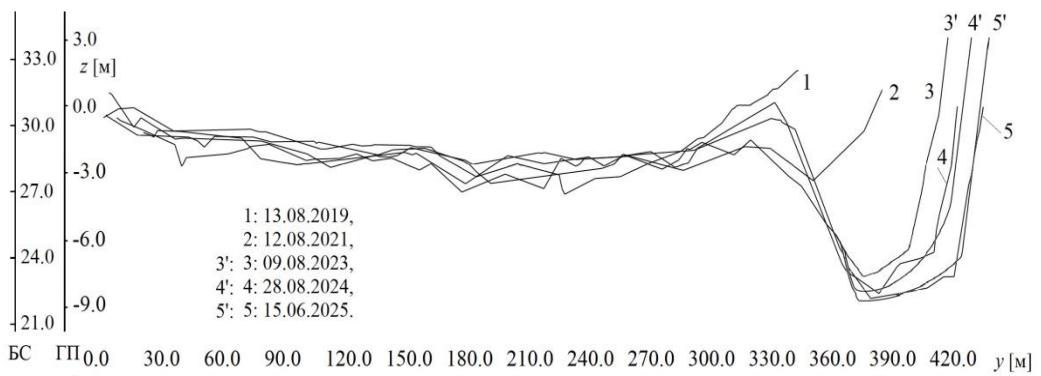


Рис.4. Размытие правого берега запруды Пемзенской.

Кривые 1-5 - натурные замеры донных отметок створа за период с 2019 по 2025 гг.

Кривые 3'-5' – результаты численного моделирования за период с 2023 по 2025 год.

Fig.4. Erosion of the right bank of the Pemzhenkaya dam.

Curves 1-5 are full-scale measurements of the bottom marks of the target for the period from 2019 to 2025.

Curves 3'-5' are the results of numerical modeling for the period from 2023 to 2025.

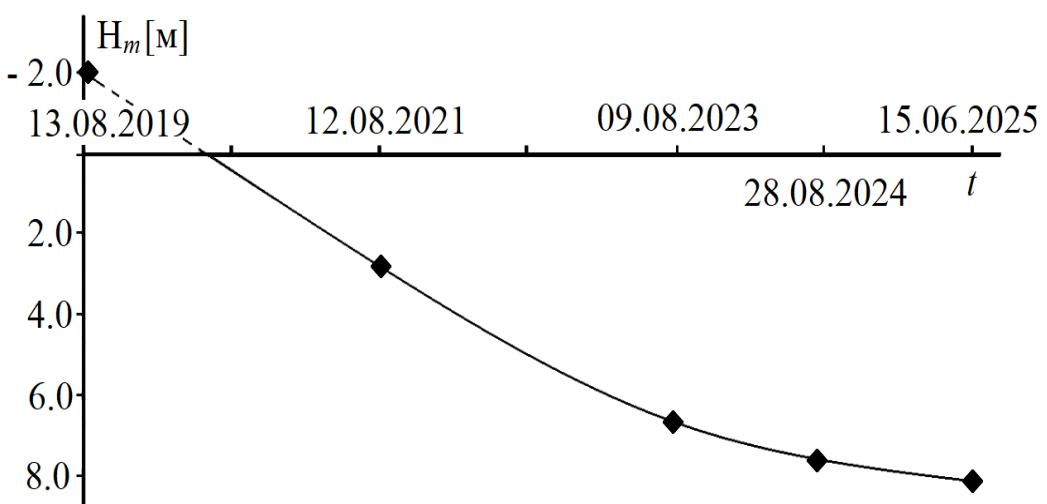


Рис.5. Изменение средней глубины прорана во времени.

Fig.5. Average depth changes of the gap over time.

Сравнительный анализ данных полевых наблюдений (линии 3-5, рис. 4) с результатами расчетов (линии 3'-5', рис.4) показывает их удовлетворительное согласование как по качественным, так и по количественным параметрам. При средней скорости эрозии береговой линии в 14.3 метра в год расхождения между расчетными и экспериментальными данными не превышают двух метров.

В заключение отметим, что прогнозируемое годовое смещение береговой линии вследствие эрозионных процессов согласуется с результатами полевых наблюдений, проведенных 28 августа 2024 года и 15 июня 2025 года. Различия между расчетными данными и фактическими измерениями не превышают 13%, что свидетельствует об адекватности предложенной русловой модели.

## 7. Заключение

Разработана математическая модель для анализа процессов эрозии берегового склона протоки Пемзенской при формировании прорана у правого берега переливной запруды с момента достижения прораном режимной глубины протоки.

Модель учитывает влияние изменений расхода потока в проране на эволюцию отметок свободной поверхности во времени. Ключевым компонентом предложенной модели является стоковый член в уравнении донных деформаций, который предотвращает заиление прорана и регулирует его углубление, стремясь к установленвшемуся значению глубины прорана. В процессе валидации модели было показано, что предложенная математическая модель, использованный метод и алгоритм расчета позволили получить решение задачи, хорошо согласующееся с данными полевых наблюдений в зоне прорана как в отношении фронтальной эрозии берегового склона, так и в отношении интенсивности врезания речного потока в русловое ложе.

## Список литературы / References

- [1]. Glover R. E., Florey Q. L. Stable channel profiles // U. S. Bureau of Reclamation, Washington. 1951.
- [2]. Кондратьев Н.Е., Ляпин А.Н., Попов И.В., Пиньковский С.И., Федоров Н.Н. Якунин И.И. Русловой процесс. Л.: Гидрометеоиздат. 1959. 372 с./Kondratiev N.E., Lyapin A.N., Popov I.V., Pinkovsky S.I., Fedorov N.N. Yakunin I.I. Riverbed process. L.: Hydrometeoizdat. 1959. 372 p. (in Russian).
- [3]. Макавеев Н.И. Русло реки и эрозия в ее бассейне. М.: Издательство АН СССР, 1955, 348 п./ [2]. Makaveev N.I. River bed and erosion in its basin. M.: Publishing House of the USSR Academy of Sciences, 1955, 348 p. (in Russian).
- [4]. Ikeda S., Parker G., Saway K. Bend theory of river meanders. Part 1. Linear development // J. Fluid Mech. 1981. no. 112. P. 363–377.
- [5]. Ikeda S. Stable channel cross-sections of straight sand rivers // J. Water Resources Res., 1991. Vol. 27, no. 9. P. 2429–2438.
- [6]. Hirano M. River-bed variation with bank erosion // J. of Hydraulic, Coastal and Environmental Engineering. 1973. no. 210. P. 13–20 (in Japanese).
- [7]. Parker G. Self-formed straight rivers with equilibrium banks and mobile bed. Part 1. The sand–silt river // J. Fluid Mech. 1978. part 1, Vol. 89. P. 109–126.
- [8]. Monteiro-Alves, R.; Moran, R.; Toledo, M.A.; Jimenez-Rodriguez, R.; Picault, C.; Courivaud, J.-R. Overflow-Induced Breaching in Heterogeneous Coarse-Grained Embankment Dams and Levees—A State of the Art Review. Appl. Sci. 2025, 15, 8808. <https://doi.org/10.3390/app15168808>
- [9]. Visser, K.; Tejral, R.D.; Neilsen, M.L. WinDAM C Earthen Embankment Internal Erosion Analysis Software, n.d. (accessed on 19 June 2025) Available online: <https://www.ars.usda.gov/research/publications/publication/?seqNo115=317437>.
- [10]. Dazzi, S.; Vacondio, R.; Mignosa, P. Integration of a Levee Breach Erosion Model in a GPU-Accelerated 2D Shallow Water Equations Code. Water Resour. Res. 2019, 55, 682–702.
- [11]. Петров П.Г. Движение сыпучей среды в придонном слое жидкости // ПМТФ, 1991. № 5. С. 72 — 75. / Petrov P.G. Movement of a granular medium in the bottom layer of liquid // PMTF, 1991. No. 5. P. 72 — 75. (in Russian).
- [12]. Бондаренко Б.В., Потапов И.И. Моделирование эволюции поперечного сечения песчаного канала // Вычислительные технологии evolution of the cross section of the sand channel. 2009. Т.14, № 5. С. 1–14. / Bondarenko B.V., Potapov I.I. Modeling the evolution of the cross section of the sand channel // Computational technologies evolution of the cross section of the sand channel. 2009. T.14, no. 5. pp. 1–14. (in Russian).
- [13]. Потапов И.И., Бондаренко Б.В. Математическое моделирование эволюции берегового склона в каналах с песчаным руслом // Вычислительные технологии. 2013. Т.18, № 4. С. 25–36./ Potapov I.I., Bondarenko B.V. Mathematical modeling of the evolution of the coastal slope in channels with a sandy bed // Computational technologies. 2013. T.18, no. 4. pp. 25–36 (in Russian).
- [14]. Потапов И.И., Силакова Ю.Г. Процесс разрушения переливной запруды на Пемзенской протоке реки Амур//Гидротехническое строительство. № 2, 2025. / Potapov I.I., Silakova Yu.G. The process

- of destruction of the overflow dam on the Pemzenskaya channel of the Amur River//Hydraulic engineering construction. No. 2, 2025. (in Russian).
- [15]. Петров А.Г., Потапов И.И. Избранные разделы русловой динамики // М.: Ленанд. 2019. 244 с. / Petrov A.G., Potapov I.I. Selected sections of channel dynamics // M.: Lenand. 2019. 244 p. (in Russian).
- [16]. Van Rijn L. C. Sediment transport, Part II: Suspended load transport // Journal of Hydraulic Engineering. – 1984. – Vol. 110, No. 11. – P. 1613–1641.
- [17]. Шабров Н. Н. Метод конечных элементов в расчетах деталей тепловых двигателей. - Л.: Машиностроение, 1983. - 212 с./ Shabrov N. N. The finite element method in calculations of heat engine parts. Moscow: Mashinostroenie Publ., 1983. 212 p. (in Russian).
- [18]. Potapov I.I. Source code of the Amur information system. <https://github.com/PotapovII/Amur>.

## **Информация об авторах / Information about authors**

Игорь Иванович ПОТАПОВ – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лаборатории вычислительной механики Вычислительного центра Дальневосточного отделения Российской академии наук с 2009 года. Сфера научных интересов: численные методы, русловые и гидродинамические процессы в равнинных реках.

Igor Ivanovich POTAPOV – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Head of the Laboratory of Computational Mechanics of the Computing Center of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences since 2009. Area of scientific interests: numerical methods, channel and hydrodynamic processes in lowland rivers.

Дмитрий Игоревич ПОТАПОВ – младший научный сотрудник лаборатории вычислительной механики Вычислительного центра Дальневосточного отделения Российской академии наук.

Dmitry Igorevich POTAPOV – reasearcher of Laboratory of Computational Mechanics of the Computing Center of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences.

