



## Численный поиск собственных значений для анализа возбуждений поля в одной задаче магнитной гидродинамики

<sup>1</sup> М.В. Фролова, ORCID: 0009-0002-0440-5550 <pashentceva.mv17@physics.msu.ru>

<sup>1,2</sup> Е.А. Михайлов, ORCID: 0000-0002-9747-4039 <ea.mikhajlov@physics.msu.ru>

<sup>1</sup> Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова  
Россия, 119991, г. Москва, Ленинские горы, д. 1.

<sup>2</sup> Физический институт имени П.Н. Лебедева РАН,  
Россия, 119991, Москва, Ленинский проспект, д. 53.

**Аннотация.** Магнитогидродинамические процессы играют важнейшую роль в большом количестве физических явлений и технических процессов, связанных с течениями проводящих жидкостей. Большое значение для астрофизики имеет возбуждение магнитного поля за счет свойств турбулентных движений – так называемый механизм динамо. Как правило, он описывается с помощью усреднения уравнений магнитной гидродинамики и введения альфа-эффекта. Возможность генерации магнитного поля в таком случае определяется нарастанием его малых возмущений со временем. Рост или затухание магнитного поля определяется знаком действительных частей его собственных значений (или знаком в случае, если они действительны). Одной из самых интересных задач является возможность возбуждения магнитного поля в диске. Подобная модель хорошо определяет поведение магнитного поля в галактиках и в аккреционных дисках, которые окружают компактные астрофизические объекты (черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды). В простейшем случае диска пренебрежимо малой толщины задача на собственные значения может иметь даже аналитическое решение. Вместе с тем, если говорить о дисках конечной толщины, это приводит к возможности решения задачи только с использованием асимптотических приближений. Если же диск расширяется к краям (что весьма характерно как для галактик, так и для аккреционных дисков), то решить эту задачу возможно, по-видимому, лишь численно. В настоящей работе представлены результаты численного поиска собственных значений для возбуждения магнитного поля в расширяющемся диске. С этой целью дифференциальный оператор заменяется конечно-разностным, а его собственные значения ищутся с помощью обратного степенного метода. В таком случае задачу можно решать с использованием метода немонотонной прогонки. Представлены старшие собственные значения и собственные функции для различных моделей расширения диска.

**Ключевые слова:** магнитное поле; метод немонотонной прогонки; задача на собственные значения; динамо.

**Для цитирования:** Фролова М.В., Михайлов Е.А. Численный поиск собственных значений для анализа возбуждений поля в одной задаче магнитной гидродинамики. Труды ИСП РАН, том 38, вып. 3, часть 4, 2026 г., стр. 217–228. DOI: 10.15514/ISPRAS–2026–38(3)–57.

**Благодарности:** Работа М.В. Фроловой по численному поиску решений была поддержана грантом Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС». Работа Е.А. Михайлова по общей постановке задачи выполнена при поддержке государственного задания МГУ имени М.В. Ломоносова.

## Numerical Search of Eigenvalues for Analysis of Perturbations of Field in One Problem of Magnetohydrodynamics

<sup>1</sup> M.V. Frolova, ORCID: 0009-0002-0440-5550 <pashentceva.mv17@physics.msu.ru>

<sup>1,2</sup> E.A. Mikhailov, ORCID: 0000-0002-9747-4039 <ea.mikhajlov@physics.msu.ru>

<sup>1</sup> *Lomonosov Moscow State University,  
GSP-1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia.*

<sup>2</sup> *Lebedev Physical Institute of RAS,  
53, Leninsky prospect, Moscow, 119991, Russia.*

**Abstract.** Magnetohydrodynamic processes play a crucial role in numerous physical phenomena and engineering processes involving the flow of conducting fluids. Of great importance in astrophysics is the excitation of a magnetic field due to the properties of turbulent motion – the so-called dynamo mechanism. It is typically described by averaging the equations of magnetohydrodynamics and introducing the alpha effect. The possibility of generating a magnetic field in this case is determined by the growth of its small perturbations over time. This requires linearizing the problem, which leads to an evolution equation with a differential operator on the right-hand side. The growth or decay of the magnetic field is determined by the sign of the real parts of its eigenvalues (or the sign if they are real). One of the most interesting problems is the possibility of excitation of a magnetic field in a disk. This model well describes the behavior of magnetic fields in galaxies and in accretion disks that surround compact astrophysical objects (black holes, white dwarfs, and neutron stars). In the simplest case of a disk of negligible thickness, the eigenvalue problem may even have an analytical solution. However, for disks of finite thickness, this leads to the possibility of solving the problem only using asymptotic approximations. If the disk expands toward its edges (which is quite typical for both galaxies and accretion disks), then this problem can apparently only be solved numerically. This paper presents the results of a numerical search for eigenvalues for the excitation of a magnetic field in an expanding disk. For this purpose, the differential operator is replaced by a finite-difference operator, and its eigenvalues are found using the inverse power-law method. In this case, the problem can be solved using the nonmonotonic sweep method. The leading eigenvalues and eigenfunctions for various disk expansion models are presented.

**Keywords:** magnetic field; non-monotonic sweep method; eigenvalue problem; dynamo.

**For citation:** Frolova M.V., Mikhailov E.A. Numerical search of eigenvalues for analysis of perturbations of field in one problem of magnetohydrodynamics. *Trudy ISP RAN/Proc. ISP RAS*, vol. 38, issue 3, part 4, 2026, pp. 217-228 (in Russian). DOI: 10.15514/ISPRAS-2026-38(3)-57.

**Acknowledgements.** Work of M.V. Frolova on numerical studies was supported by a grant from the Foundation for the Development of Theoretical Physics and Mathematics "BASIS". Work of E.A. Mikhailov on general formulation of the problem was supported by state assignment of Lomonosov Moscow State University.

### 1. Введение

Магнитная гидродинамика описывает большое количество процессов, которые представляют существенное значение при исследовании различных задач физики и техники [1-3]. Она описывает течения проводящих жидкостей, газов и плазмы, которые тесно связаны с наличием магнитного поля. Если говорить о прикладной значимости их исследования, то как правило это относится к задачам металлургии [4] (в особенности, при изучении работы электрических печей, где через хорошо проводящий расплав пропускается электрический ток), моделированию поведения электролитов в аккумуляторных батареях при заряде и разряде, жидкометаллических системах охлаждения, удержанию плазмы в магнитном поле и так далее. Между тем, не менее интересны фундаментальные задачи, которые связаны, как правило, с исследованием генерации магнитных полей космических объектов [5]. Исследования солнечных пятен и связанных с ними магнитных полей показали, что на ближайшей к нам звезде действует так называемый механизм динамо, связанный с

генерацией магнитного поля за счет характеристик турбулентных движений и крупномасштабного вращения с непостоянной скоростью (дифференциальное вращение) [6]. Также было убедительно показано, что аналогичные процессы описывают возникновение магнитного поля Земли [7], галактик [8], аккреционных дисков [9] и других космических объектов. Подобные задачи представляют большой интерес одновременно с точки зрения теоретической физики, гидродинамики, математического моделирования и других областей естественных наук.

Описанный выше механизм возникновения магнитного поля получил название динамо. Для его исследования необходимо наличие ненулевой спиральности турбулентных течений и градиента угловой скорости вращения объекта [5]. Для исследования его действия используется усреднение классических уравнений магнитной гидродинамики по масштабам, сопоставимым с типичными размерами турбулентных вихрей [3]. Это приводит к эволюционным уравнениям, в левой части которых стоит производная поля по времени, а в правой – оператор, включающий в себя скорость, магнитное поле и другие параметры объекта. Возможность действия динамо связана с ростом или затуханием малых возмущений магнитного поля. Одним из способов исследования этого процесса является линеаризация оператора, стоящего в правой части уравнения, и поиск его собственных значений [10]. Они описывают темп экспоненциального увеличения основных переменных в задаче. В таком случае при наличии собственных значений, имеющих положительную вещественную часть (либо являющихся положительными при действительном спектре) можно ожидать роста возмущений поля и возможности сгенерировать крупномасштабные структуры поля.

Особую роль играет исследование магнитных полей в объектах, имеющих форму диска. Они характеризуют галактики (чья форма близка к диску) и аккреционные диски, которые окружают компактные астрофизические объекты – такие как черные дыры, нейтронные звезды и белые карлики. В простейшем случае, когда толщину диска можно считать пренебрежимо малой, а поле осесимметричным – получается решить данную задачу аналитически и точно [11]. В случае конечной толщины диска приходится строить более сложную модель, учитывающую вертикальные потоки магнитного поля. Это заметно усложняет задачу поиска спектра оператора, однако использование методов теории возмущений, разработанных в квантовой механике, позволяет получить асимптотически точные решения [10]. Ситуация существенно усложняется при рассмотрении задачи о магнитном поле в расширяющемся диске. В таком случае полное решение задачи удастся построить, по-видимому, лишь численно.

В настоящей работе исследуется оператор, описывающий действие динамо в осесимметричном расширяющемся диске. Он содержит вертикальную и радиальную части, и для производных по переменной  $z$  задача может быть решена аналитически (с использованием результатов теории возмущений для собственных значений дифференциальных операторов, описанных выше). Для радиальной части получена задача, которая может быть решена численно в случае замены дифференциального оператора на конечно-разностный [12]. Тогда поиск собственных значений оказывается возможным с помощью обратного степенного метода [13]. Для этого с вычислительной точки зрения на каждом из шагов необходимо решить систему линейных дифференциальных уравнений. Учитывая отсутствие диагонального преобладания, наиболее удобно решать ее с помощью метода немонотонной прогонки, хорошо известного в вычислительной математике.

Представлены результаты поиска собственных значений для нескольких характерных зависимостей полутолщины диска от расстояния до его оси, которые типичны для ряда галактических и аккреционных дисков. Также приводятся старшие собственные функции, которые характеризуют профиль растущих возмущений и дают представление о магнитном поле, генерируемом за счет действия механизма динамо.

## 2. Основные уравнения

Генерация крупномасштабного магнитного поля в астрофизических объектах описывается с помощью так называемого уравнения Штеенбека – Краузе – Рэдлера, которое получается при усреднении классических уравнений магнитной гидродинамики [3]:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \vec{v} \times (\alpha \vec{B}) + \nu \Delta \vec{B},$$

где  $\vec{B}$  – магнитное поле,  $\vec{v}$  – скорость крупномасштабных движений (обычно предполагается, что  $\vec{v} = r\Omega \vec{e}_\varphi$ ),  $\nu$  – коэффициент турбулентной диффузии,  $\alpha$  – коэффициент, характеризующий спиральность турбулентных движений (альфа-эффект), имеющих поле скоростей  $\vec{v}$ . Он является псевдоскаляром и определяется следующим выражением [3]:

$$\alpha = -\frac{\tau}{3} \langle (\vec{v} \cdot \vec{v} \times \vec{v}) \rangle.$$

В случае с дисками можно показать, что альфа-эффект приближается следующей формулой [14]:

$$\alpha = \frac{\Omega l^2 z}{h^2},$$

где  $\Omega$  – угловая скорость вращения диска,  $h$  – его полутолщина,  $l$  – размер турбулентных ячеек. Отметим, что в практически значимых случаях можно считать, что для коэффициента диффузии  $\nu = \frac{1}{3}lv$ , где  $v$  – средняя скорость турбулентных движений проводящей среды.

Полное решение данной задачи оказывается довольно сложным. Однако основную роль играет азимутальная компонента магнитного поля: для практически значимых случаев можно полагать, что  $\vec{B} \approx B \vec{e}_\varphi$ . Ее эволюцию можно описать с помощью следующего приближенного уравнения [15]:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = D^{1/2} B + D^{1/2} z \frac{\partial B}{\partial z} + \lambda^2 \left( \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B}{\partial r} - \frac{B}{r^2} \right).$$

Времена здесь измеряются в единицах  $\frac{h^2}{\nu}$ , а расстояния в единицах радиуса диска  $R$ . Также введен параметр  $\lambda = \frac{h}{R}$  и так называемое динамо-число  $D = \frac{9h^2\Omega^2}{\nu^2}$ .

В качестве граничных условий можно предполагать, что:

$$B|_{r=0} = B|_{r=1} = B|_{z=-h(r)} = B|_{z=h(r)} = 0$$

Возможность роста магнитного поля определяется предположением об экспоненциальном увеличении поля  $B \sim \exp \gamma t$ . Это преобразует исходное уравнение к задаче на собственные значения:

$$\gamma B = D^{1/2} B + D^{1/2} z \frac{\partial B}{\partial z} + \lambda^2 \left( \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B}{\partial r} - \frac{B}{r^2} \right).$$

В том случае, если собственные значения имеют положительную действительную часть  $Re \gamma > 0$  можно предполагать рост магнитного поля. В противном случае возмущения поля будут затухать со временем, и говорить об эффективном действии динамо в таких объектах не приходится.

## 3. Модель расширяющегося диска

В данной работе рассматривается оператор, описывающий действие динамо в осесимметричном расширяющемся диске. В рамках этой модели диск имеет конечную полутолщину  $h(r)$ , поэтому вертикальная задача формулируется в слое  $-h(r) < z < h(r)$ .

Будем искать решение в виде  $B(r, z) = R(r)Z(z)$ . После разделения переменных исходная задача разбивается на две. Задача по  $z$  компоненте формулируется как краевая задача на отрезке  $-h(r) < z < h(r)$  для функции  $Z(x)$ :

$$\begin{aligned} \lambda^2 Z''(x) + \chi x Z'(x) - \kappa Z(x) &= 0, \\ Z(-h(r)) = Z(h(r)) &= 0. \end{aligned}$$

Её спектр  $\{\kappa_m\}$  действителен [15]:

$$\kappa_m = -\frac{\lambda^2 \pi^2}{4} n^2 - \frac{\chi}{2} - \frac{\chi^2}{12\lambda^2} + \frac{\chi^2}{2\pi^2 \lambda^2} \frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Для дальнейшего изложения фиксируем старшее значений  $\kappa \equiv \kappa_m$ , которое затем выступает параметром в радиальном уравнении.

Радиальная часть возникает как задача на собственные значения для функции  $R(r)$  на интервале  $r \in (r_{min}, r_{max})$  с нулевыми значениями на границах диска:

$$\begin{aligned} \gamma R = \left[ \sqrt{D} - \frac{\lambda^2}{r^2 h^2(r)} + \frac{\kappa}{h^2(r)} \right] R + \lambda^2 \left( R'' + \frac{1}{r} R' \right), \\ R(r_{min}) = R(r_{max}) = 0. \end{aligned}$$

Здесь  $\lambda, D, \kappa$  - параметры модели,  $h(r)$  – заданный профиль полутолщины диска,  $\gamma$  – искомое собственное значение. Данную задачу можно рассматривать по аналогии с поиском спектра квантовомеханического оператора Шредингера, полагая что в квадратных скобках стоит потенциал частицы.

Для решения задачи можно рассмотреть два разных профиля полутолщины диска: линейный и экспоненциальный. Расширение границы к краям весьма характерно как для галактик, так и для аккреционных дисков. Линейный рост границы описывается следующим законом:

$$h_{lin}(r) = h_0 + ar.$$

Здесь часть потенциала  $h^{-2}(r)$  из задачи для  $R(r)$  убывает как  $(h_0 + ar)^{-2}$ , что ослабляет оба барьера  $\kappa/h^2(r)$  и  $\lambda^2/(r^2 h^2(r))$  при увеличении радиуса. Собственные функции становятся шире и их максимумы смещаются наружу умеренно.

Экспоненциальный профиль полутолщины описывается так:

$$h_{exp}(r) = h_0 \exp(r/r_{max}).$$

При этом  $h^{-2}(r)$  спадает экспоненциально. Это сильнее вытесняет собственные функции к большим  $r$  и, как правило, сдвигает спектр  $\gamma_m$  по сравнению с линейным случаем.

Аналитическое решение полученной задачи с разными профилями расширения границы оказывается сложным. В таком случае полное решение задачи удастся построить, по-видимому, лишь численно.

#### 4. Численная реализация: дискретизация, немонотонная прогонка и метод обратных итераций

Численное решение спектральной задачи строится для радиального уравнения с параметром  $\kappa_m$ , которое получается из вертикальной задачи. Выбирается равномерная сетка по радиусу  $r_i = r_{min} + i\Delta r$  ( $i = 0, \dots, N$ ), где  $r_0 = r_{min}, r_N = 1$ . Вторые и первые производные аппроксимируются центральными разностями второго порядка [12]:

$$\begin{aligned} R''(r_i) &\approx \frac{R_{i+1} - 2R_i + R_{i-1}}{\Delta r^2}, \\ \frac{1}{r} R'(r_i) &\approx \frac{1}{2r_i} \cdot \frac{R_{i+1} - R_{i-1}}{\Delta r}, \end{aligned}$$

Слагаемые потенциала  $-\lambda^2/(r^2 h^2(r))$  и  $\kappa_m/h^2(r)$  берутся в «узловой» форме  $V_i R_i$  с  $V_i$  вычисленным по  $h(r_i)$ :  $V_i = -\lambda^2/(r_i^2 h^2(r_i)) + \kappa_m/h^2(r_i)$ . Получаем линейный дискретный оператор  $A$  на  $R^{N-1}$  (внутренние узлы), который естественно представлять тремя массивами  $a_i, b_i, c_i$ , которые отвечают за поддиагональ, диагональ и наддиагональ матрицы оператора. Граничные условия  $R(r_{min}) = R(1) = 0$  реализуются обнулением переменных, что соответствует классическим условиям Дирихле. Таким образом, получаем разностную аппроксимацию задачи с помощью центральных разностей второго порядка на равномерной сетке. В частности, для одномерных стационарных задач с самосопряжёнными операторами схема является второго порядка точности при достаточно гладких коэффициентах.

Ключевым инструментом поиска нужных собственных значений функций служит метод обратных итераций со сдвигом [13]. Пусть  $A$  – дискретизация нашего дифференциального оператора. Фиксируя приближение  $\sigma$  к интересующему собственному значению  $\gamma$ , на  $k$ -м шаге решаем системы линейных уравнений:

$$w_{k+1} = (\hat{A} - \sigma \hat{I})^{-1} w_k,$$

где  $w_k$  – текущий вектор приближения,  $w_{k+1}$  – обновленный вектор. Это приводит к следующей неявной задаче:

$$(A - \sigma I)w_{k+1} = v_k,$$

где  $v_{k+1} = w_{k+1}/|w_{k+1}|$ . При  $\sigma$ , достаточно близком к истинному  $\gamma$ , соответствующий собственный вектор становится доминирующим для обратного операторного шага, а сжатие по остальным модам быстрое. Для улучшения оценки  $\sigma$  используется итерационный пересчёт  $\rho(v) = \frac{(Av, v)}{(v, v)}$ . На каждой итерации решается трёхдиагональная система, что и приводит к применению устойчивой прогонки.

Особенность рассматриваемого оператора состоит в том, что после включения «эффективного потенциала»  $V_i$ , зависящего от  $h(r)$ , не всегда выполняется условие диагонального преобладания матрицы  $A$ . Это связано с большими значениями  $1/(r_i^2 h^2(r_i))$  при малых  $r_i$ . Поэтому для решения на каждом шаге линейных систем:

$$(A - \gamma I)w = v,$$

возникающих в методе обратных итераций, используется модифицированный вариант метода прогонки – так называемая немонотонная прогонка [13]. В классическом алгоритме прогонки возможна потеря устойчивости при малых или меняющих знак коэффициентах на этапе прямого хода. Немонотонная версия включает корректировки, предотвращающие деление на величины, близкие к нулю, и допускает перестройку рекуррентных коэффициентов без требования монотонности промежуточных значений в знаменателе. В практической реализации это достигается либо введением регуляризующей добавки  $\varepsilon$  к диагональным элементам, либо локальной перестановкой строк-уравнений (частичный выбор главного элемента). Выбор приёма диктуется конкретными коэффициентами. В наших вычислениях стабилизирующая поправка  $\varepsilon$  подбиралась на уровне машинной чувствительности сеточного шага, не ухудшая аппроксимационного порядка. Корректно реализованная немонотонная прогонка устраняет численные резонансы прямого хода, стабилизирует решение без потери второго порядка точности.

Для вычисления нескольких первых собственных значений и функций применяется ортогонализация получаемых мод по весу  $r$ , что исключает срыв к уже найденной собственной функции при смене сдвига. Процедура поиска выглядит так: найдя  $(\gamma_1, R_1)$  обратными итерациями с  $\sigma \approx \gamma_1$ , переходим к  $\sigma$  в окрестности  $\gamma_2$  и на каждом шаге проектируем очередной вектор на ортогональное дополнение к уже известным  $R_1$ , далее аналогично для  $\gamma_3$ . Эта стандартная техника обеспечивает устойчивую последовательность мод и корректную мультипликативную нормировку [12].

О корректности решения свидетельствуют сходимость  $\gamma^{(N)} \rightarrow \gamma$  при  $\Delta r \rightarrow 0$  и сходимость профильных функций  $R^{(N)} \rightarrow R$ , что контролировалось сеточной сходимостью второго порядка. Эта комбинация методов обеспечивает быструю сходимость к первым трём собственным парам как для линейного профиля  $h(r) = h_0 + ar$ , так и для экспоненциального  $h(r) = h_0 \exp(r/r_{max})$ , причём для первых двух мод достаточно 5-10 итераций обратного шага со сдвигом в сетках  $N \sim 10^3$ .

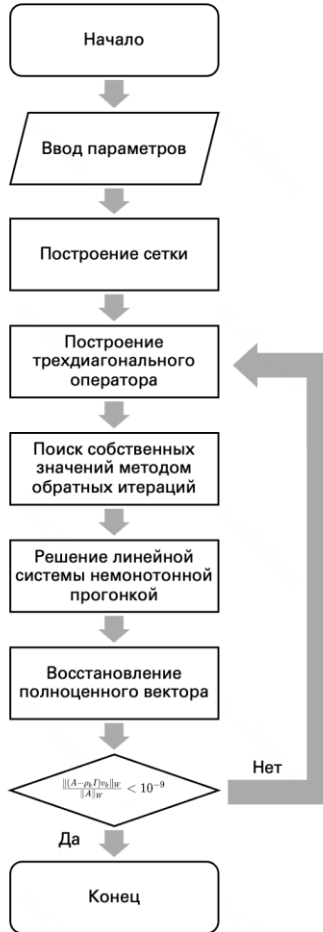


Рис. 1. Блок-схема алгоритма программы.  
Fig. 1. Flowchart of the program algorithm.

Для решения данной задачи была составлена собственная компьютерная программа на языке Python, которая реализует алгоритмы, описанные выше (рис. 1). Код представлен в свободном доступе по адресу [16]. Важно отметить, что данный подход позволяет добиться приемлемых результатов даже при использовании вычислений на одном ядре процессора, и не требует значительных вычислительных ресурсов.

## 5. Результаты и их обсуждение

Численные эксперименты проведены для двух видов профилей полутолщины диска. Для обеих моделей  $h(r)$  построены графики первых трёх собственных функций  $R_1, R_2, R_3$  при одинаковых  $D, \lambda$  и согласованной паре  $\kappa_m$  из вертикальной задачи.

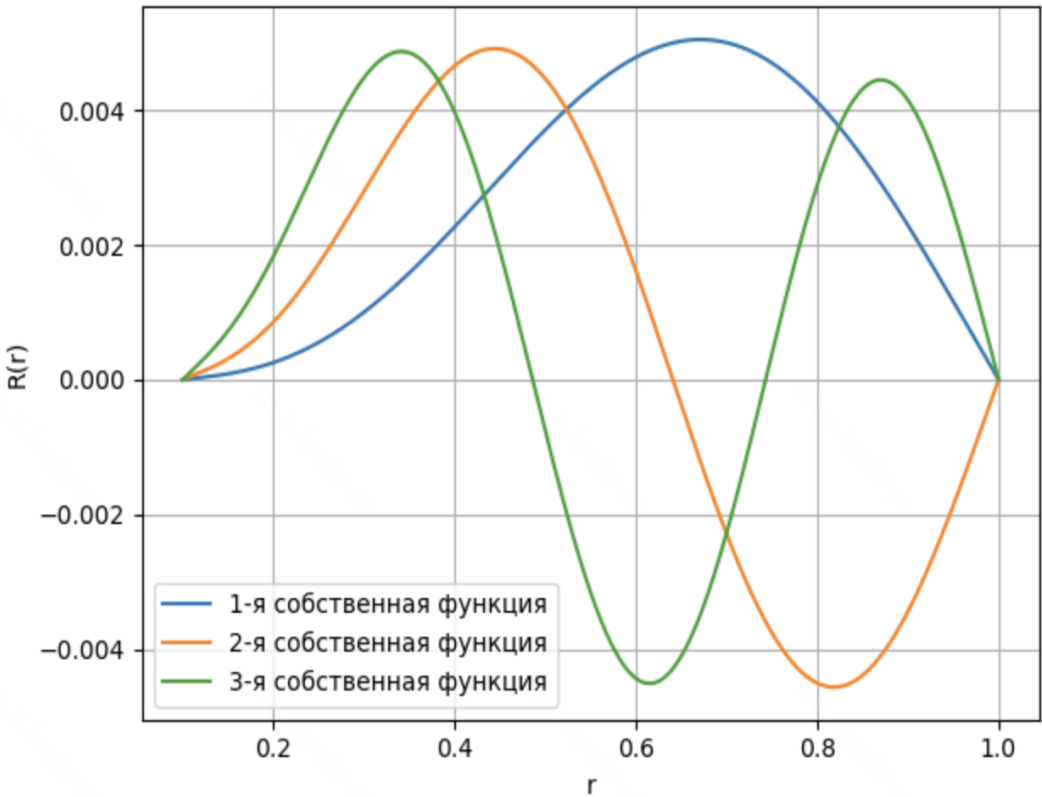


Рис. 2. Линейный профиль полутолщины диска  $h(r) = h_0 + ar$ . Первые три радиальные собственные функции  $R_1(r)$ ,  $R_2(r)$ ,  $R_3(r)$  для соответствующих собственных значений.

Fig. 2. Linear profile of disk half-thickness  $h(r) = h_0 + ar$ .

First three radial eigenfunctions  $R_1(r)$ ,  $R_2(r)$ ,  $R_3(r)$  for corresponding eigenvalues.

В первом случае  $h(r) = h_0 + ar$  линейный рост приводит к сравнительно плавному убыванию эффективного потенциала  $V(r) = -\lambda^2/(r^2 h^2(r)) + \kappa_m/h^2(r)$  по мере увеличения  $r$ , что смягчает «центральный барьер»  $r^{-2}h^{-2}(r)$ . В результате первая собственная функция  $R_1(r)$  имеет глобальный максимум на конечном  $r$  и снижается к границам, демонстрируя слабую локализацию у малого  $r$  (рис.1). Вторая и третья моды  $R_2, R_3$  показывают ожидаемое добавление узлов, но без выраженной краевой концентрации.

Во втором случае  $h(r) = h_0 \exp(r/r_{max})$  экспоненциальный рост полутолщины резко уменьшает вклад  $1/h^2(r)$  на внешних радиусах, и эффективный потенциал становится более пологим во внешней области. Это усиливает «выталкивание» мод наружу: максимум  $R_1(r)$  смещается к меньшим радиусам, профили  $R_2, R_3$  визуально шире. Такие закономерности полностью согласуются с качественным анализом оператора и с предшествующими результатами для толстых дисков.

Первые три собственных значения  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  сведены в табл. 1 для каждого  $h(r)$ .

При переходе от линейного к экспоненциальному профилю наблюдается систематический сдвиг спектра, что связано с ослаблением «потенциальной ямы» за счёт роста  $h(r)$  на внешних радиусах, и, как следствие, с уменьшением вклада  $\kappa_m/h^2(r)$  и  $1/(r^2 h^2(r))$  в среднем по области. По модам сравнение показывает, что  $|\gamma_1|$  увеличивается слабее, чем  $|\gamma_2|$  и  $|\gamma_3|$ , что отвечает меньшей чувствительности старшей моды.

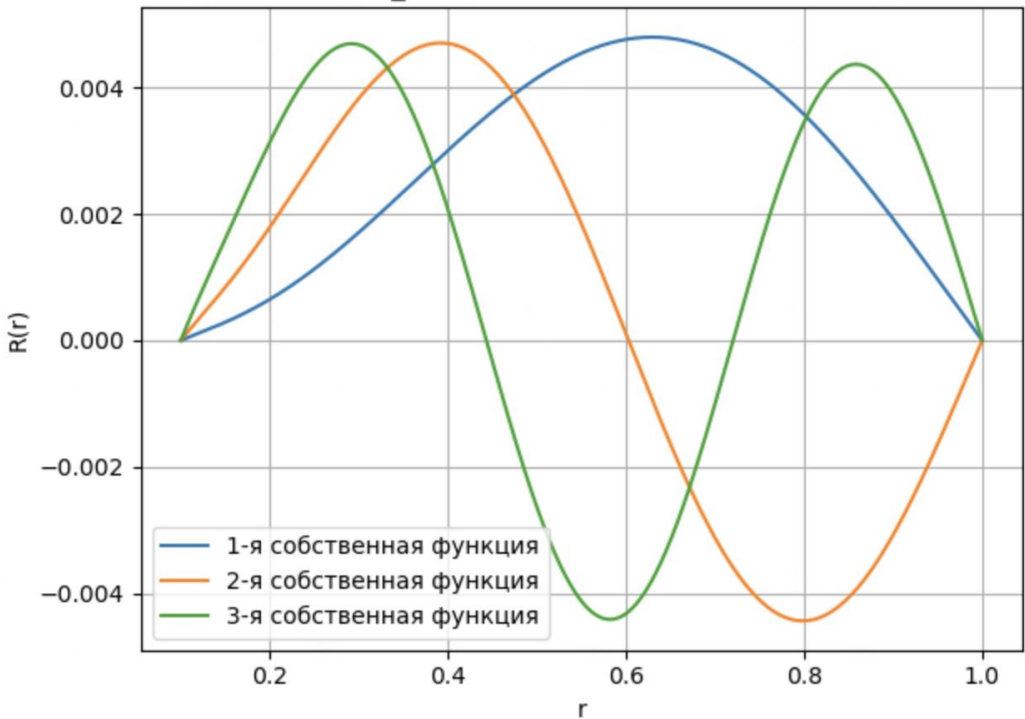


Рис. 3. Экспоненциальный профиль полутолщины диска  $h(r) = h_0 \exp(r/r_{max})$ . Первые три радиальные собственные функции  $R_1(r)$ ,  $R_2(r)$ ,  $R_3(r)$  для соответствующих собственных значений.

Fig. 3. Exponential profile of disk half-thickness  $h(r) = h_0 \exp(r/r_{max})$ .

First three eigenfunctions  $R_1(r)$ ,  $R_2(r)$ ,  $R_3(r)$  for corresponding eigenvalues.

Табл. 1. Собственные значения  $\gamma$  для радиальных собственных функций  $R_1(r)$ ,  $R_2(r)$ ,  $R_3(r)$ .  
Table 1. Eigenvalues  $\gamma$  for eigenfunctions  $R_1(r)$ ,  $R_2(r)$ ,  $R_3(r)$ .

Номер собственного значения	$\gamma$ – линейный профиль $h$	$\gamma$ – экспоненциальный профиль $h$
1	3.1	3.12
2	3.02	3.05
3	2.91	2.95

## 6. Заключение

Таким образом, в работе сформулирована и решена с помощью методов компьютерного моделирования спектральная задача для оператора эволюции магнитного поля в толстом проводящем расширяющемся проводящем диске, который описывает большое количество задач о действии динамо в астрофизике. Полученная радиальная задача с нулевыми граничными условиями формирует спектр  $\gamma_{m,n}$ , определяющий режимы роста или затухания магнитного поля. Теоретические построения согласуются с ранее полученными результатами о положении спектра и его асимптотике для оператора  $\widehat{L}_z$ .

Численный метод основан на центральной разностной дискретизации второго порядка и трёхдиагональном представлении оператора  $A$ . Система уравнений, возникающая при обратных итерациях со сдвигом, решается методом немонотонной прогонки, что принципиально важно при отсутствии диагонального преобладания из-за пространственно-переменного «потенциала». Это даёт устойчивую и быструю сходимость к первым

нескольким собственным значениям и функциям, что подтверждено сеточной сходимостью и сопоставлением с аналитическими оценками. Для реализации данных численных подходов использовался собственный программный код, составленный на языке Python.

Численные эксперименты для двух типов профилей  $h(r)$  показывают физически прозрачную картину: увеличение полутолщины к внешним радиусам ослабляет потенциальную яму и смещает моды к периферии, при этом старшая собственная функция изменяется слабее последующих. Спектр при переходе от линейного к экспоненциальному профилю систематически сдвигается, что качественно согласуется с ролью  $h^{-2}(r)$  в операторе.

Таким образом, полученные результаты служат базой для последующего поиска порогов генерации, анализа чувствительности спектра к профилю  $h(r)$  и к параметрам переноса.

## Список литературы / References

- [1]. Куликовский А.Г., Любимов Г.А. Магнитная гидродинамика. М., Логос, 324 с. / Kulikovskiy A.G., Lyubimov G.A. Magnetohydrodynamics. Moscow, Logos, 2011, 324 p. (in Russian).
- [2]. Брановер Г.Г., Цинобер А.Б. Магнитная гидродинамика несжимаемых сред. М., Наука, 1970, 377 с. / Branover G.G., Tsinober A.B. Magnetohydrodynamics of incompressible media. Moscow, Nauka, 1970, 377 p. (in Russian).
- [3]. Krause F., Rädler K.-H. Mean-Field Magnetohydrodynamics and Dynamo Theory. Oxford, Pergamon Press, 1980, 271 p.
- [4]. Кабаков З., Самойлович Ю., Габелая Д., Подорванов А., Шифман Э. Теория и практика применения электрических и магнитных воздействий при непрерывной разливке стали. М., Вологда, Инфра-Инженерия, 2021, 164 с. / Kabakov Z., Samoylovich Yu., Gabelaya D., Podorvanov A., Shifman E. Theory and practice of applying electric and magnetic influences during continuous casting of steel. Moscow, Vologda, Infra-Engineering, 2021, 164 p. (in Russian).
- [5]. Зельдович Я.Б., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д. Магнитные поля в астрофизике. М., Ижевск, Регулярная и хаотическая динамика, 2006, 384 с. / Zeldovich Ya.B., Ruzmaikin A.A., Sokoloff D.D. Magnetic fields in astrophysics. Moscow, Izhevsk, Regular and Chaotic Dynamics, 2006, 384 p. (in Russian).
- [6]. Parker E.N. Hydromagnetic Dynamo Models. *Astrophysical Journal*, 1955, vol. 122, pp. 293-314. DOI: 10.1086/146087.
- [7]. Elsasser, W.M. Hydromagnetism. I. A Review. *American Journal of Physics*, 1955, vol. 23, pp. 590-609. DOI: 10.1119/1.1934109.
- [8]. Beck R., Brandenburg A., Moss D., Shukurov A., Sokoloff D. Galactic Magnetism: Recent Developments and Perspectives. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, 1996, vol. 34, pp.155-206. DOI: 10.1146/annurev.astro.34.1.155
- [9]. Boneva D.V., Mikhailov E.A., Pashentseva M.V., Sokoloff D.D. Magnetic fields in the accretion disks for various inner boundary conditions. *Astron. Astrophys.*, 2021, vol. 652, A38. DOI: 10.1051/0004-6361/202038680.
- [10]. Mikhailov E., Pashentseva M. Eigenvalue Problem for a Reduced Dynamo Model in Thick Astrophysical Discs. *Mathematics*, 2023, vol. 11, 3106. DOI: 10.3390/math11143106.
- [11]. Михайлов Е.А., Пашенцева М.В. Задача на собственные значения для динамо в толстом диске и порог генерации магнитного поля. Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия, 2022, вып. 5, стр. 65-69. / Mikhailov E.A., Pashentseva M.V. The Eigenvalue Problem for a Dynamo in a Thick Disk and the Threshold of Magnetic Field Generation. *Moscow University Physics Bulletin*, 2022, vol. 77, no. 5. pp. 741-746. DOI: 10.3103/S0027134922050101.
- [12]. Калиткин Н.Н. Численные методы: учебное пособие. СПб.: БХВ-Петербург, 2011, 592 с. / Kalitkin N.N. Numerical methods: textbook. Saint-Petersburg, BHV-Petersburg, 2011, 592 p. (in Russian).
- [13]. Маркова Л.В., Корчевская Е.А. Численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова, 2011, 50 с. / Markova L.V., Korchevskaya E.A. Numerical methods of solution of systems of linear algebraic equations. Vitebsk, Masherov VGU, 2011, 50 p. (in Russian).
- [14]. Arshakian T.G., Beck R., Krause M., Sokoloff D. Evolution of magnetic fields in galaxies and future observational tests with the Square Kilometre Array. *Astron. Astrophys.*, 2009, vol. 494, pp.21-32. DOI: 10.1051/0004-6361:200810964.

- [15]. Фролова М.В., Михайлов Е.А., Тихонов Ю.А. Разрешимость одной эволюционной задачи магнитной гидродинамики и оценка скорости роста его решения. XIV Белорусская математическая конференция, посвященная 65-летию Института математики НАН Беларуси: материалы Международной научной конференции, Минск, 28 октября – 1 ноября 2024 г. Т. 2. Минск: Белорусская наука, 2024, стр. 103–104 / Frolova M.V., Mikhailov E.A., Tikhonov Yu.A. Solvability of one evolutionary problem of magnetohydrodynamics and estimate of velocity of its growth. XIV Belorussian mathematical conference, Minsk, 28 October – 1 November 2024. Book 2., Minsk, Belorussian Science, 2024, pp.103-104.
- [16]. Поиск собственных значений и функций расширяющегося диска. Доступно по ссылке: <https://github.com/pashentsevamary/science/tree/main>, обращение 30.03.2026.

### **Информация об авторах / Information about authors**

Мария Владимировна ФРОЛОВА – аспирантка кафедры математики физического факультета МГУ с 2023 года. Сфера научных интересов: моделирование в механике сплошных сред, космический магнетизм.

Maria Vladimirovna FROLOVA – postgraduate student at the Department of Mathematics of Faculty of Physics of MSU since 2023. Her research interests: modeling in continuous media mechanics, cosmic magnetism.

Евгений Александрович МИХАЙЛОВ – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математики физического факультета МГУ с 2026 года, старший научный сотрудник отдела теоретической физики имени И.Е. Тамма Физического института имени П.Н. Лебедева с 2021 года. Сфера научных интересов: магнитная гидродинамика, моделирование в механике сплошных сред, космический магнетизм.

Evgeny Alexandrovich MIKHAILOV – Dr. Sci. (Phys.-Math), Assoc. Prof., professor at the Department of Mathematics of Faculty of Physics of MSU since 2026, senior researcher of the Tamm Department of Theoretical Physics of the Lebedev Physical Institute of RAS since 2021. His research interests: magnetohydrodynamics, modeling in continuous media mechanics, cosmic magnetism.

