

Алгоритм упаковки прямоугольников в несколько полос и анализ его точности в среднем¹

² Д.О. Лазарев <dennis810@mail.ru>

^{1,2} Н.Н. Кузюрин <nnkuz@ispras.ru>

¹ Институт системного программирования им. В.П. Иванникова РАН,
109004, Россия, г. Москва, ул. А. Солженицына, д. 25

² Московский физико-технический институт,
141700, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., 9

Аннотация. В 2012 году М. А. Трушников предложил принципиально новый онлайн-алгоритм упаковки прямоугольников в полосу, а в 2013 году была получена оценка точности алгоритма в среднем, равной математическому ожиданию незаполненной прямоугольниками площади, равная $O(\sqrt{N}(\ln N)^{\frac{3}{2}})$. Ранее известная оценка $O(N^{\frac{2}{3}})$ была существенно улучшена. В настоящей работе данная оценка улучшена до $O(\sqrt{N} \ln N)$, а также алгоритм Трушникова обобщён на случай упаковки N прямоугольников в k полос, $k \leq \sqrt{N}$, с сохранением оценки $O(\sqrt{N} \ln N)$.

Ключевые слова: новая эвристика, задача упаковки прямоугольников в полосу, задача упаковки прямоугольников в несколько полос, оценка в среднем.

DOI: 10.15514/ISPRAS-2017-29(6)-13

Для цитирования: Лазарев Д.О., Кузюрин Н.Н. Алгоритм упаковки прямоугольников в несколько полос и анализ его точности в среднем. Труды ИСП РАН, том 29, вып. 6, 2017 г., стр. 221-228. DOI: 10.15514/ISPRAS-2017-29(6)-13

1. Введение

Задача упаковки прямоугольников в несколько полос, в англоязычной литературе называемая Multiple Strip Packing Problem, заключается в упаковке открытых прямоугольников в некоторое число вертикальных полубесконечных полос единичной ширины. Основания полос — отрезки единичной длины, лежащие на одной горизонтальной прямой с ординатой, равной нулю. Прямоугольники не пересекаются, их стороны параллельны

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 17-07-01006 А

сторонам полос, вращения запрещены. Требуется минимизировать высоту h упаковки — ординату самой высокой точки, принадлежащей замыканию одного из прямоугольников.

Практическая важность задачи обуславливается следующей её интерпретацией: каждый прямоугольник представляет собой задачу, вычисляемую на кластере. Каждая задача вычисляется на некотором вычислительном устройстве, то есть каждый прямоугольник кладётся в некую полосу. Высота прямоугольника — время выполнения задачи, а ширина — отношение мощности вычислительных ресурсов, задействованных для решения данной задачи к общей доступной на данном вычислительном устройстве мощности вычислительных ресурсов.

Будем рассматривать онлайн-алгоритмы, размещающие очередной прямоугольник в полосы без знания параметров выпадающих за ним прямоугольников. Предположим, что общее число прямоугольников известно алгоритму до начала работы. Пусть значения длин сторон всех прямоугольников — независимые в совокупности величины, имеющие равномерное распределение на $[0,1]$. Анализ алгоритма производим в среднем, т.е. минимизируем $E(S_{sp})$ — математическое ожидание площади полос, не заполненной прямоугольниками на высоте от 0 до h , где h — высота упаковки.

Задача упаковки прямоугольников в одну полосу, называемая в англоязычной литературе Strip Package Problem, хорошо исследована и для неё было построено множество эвристик. Известно, что для оптимальной упаковки в данной задаче $E(S_{sp}) = O(\sqrt{N})$. В 1993 году в [1] Коффманом и Шором был предложен оффлайн-алгоритм упаковки прямоугольников с $E(S_{sp}) = O(\sqrt{N})$. Там же был предложен онлайн-алгоритм с $E(S_{sp}) = O(N^{\frac{2}{3}})$.

В 2012 году в [2] Трушниковым был предложен принципиально новый онлайн-алгоритм, а в следующем году в [3] было показано, что данный алгоритм работает лучше всех ранее известных алгоритмов: для него $E(S_{sp}) = O(\sqrt{N}(\ln N)^{\frac{3}{2}})$.

Задача упаковки прямоугольников в несколько полос была рассмотрена С.Н. Жуком в работе [4], однако в ней рассматривается оценка точности алгоритма для худшего случая.

В настоящей работе исследовались алгоритмы, работающие по тому же принципу, что и алгоритм Трушникова. Для них улучшена ранее доказанная в работе [3] оценка: $E(S_{sp}) = O(\sqrt{N} \ln N)$.

Также данная оценка обобщена на случай k полос, где $k \leq \sqrt{N}$.

2. Модифицированное доказательство Трушникова

В данном разделе мы изучаем алгоритмы онлайн-упаковки в полубесконечную полосу ширины w ($w \geq 1$) N прямоугольников, длины

сторон которых имеют равномерное распределение на отрезке $[0,1]$. Считаем, что число N изначально известно алгоритму, и пусть параметр $d = d(N)$.

Предположим, что удалось без остатка свободного пространства разбить нижнюю часть полосы высотой $\frac{N}{4w}$ на d контейнеров шириной $\frac{i}{d+1}$, $i = \overline{1, d}$ и высотой $U = \frac{N}{2wd}$.

Рассмотрим алгоритм типа алгоритма Трушникова: прямоугольник кладём в контейнер минимальной ширины, в который он помещается; если же он не помещается, то назовём его прямоугольником переполнения. Нижнюю горизонтальную сторону такого прямоугольника кладём на самую высокую верхнюю грань предыдущего прямоугольника переполнения. Первый прямоугольник переполнения кладём нижней стороной на верхнюю сторону верхнего контейнера.

Тогда верно следующее утверждение: если $\exists N_0: \forall N > N_0$ верно: $\exists c > 0: c\sqrt{N} < d(N) < C\sqrt{N}$, то алгоритм данного типа даёт математическое ожидание незаполненной площади полосы снизу до верхней грани верхнего контейнера, равное $E(S_{sp}) = O(\sqrt{N} \ln N)$.

Доказательство во многом повторяет оценку Трушникова $E(S_{sp})$ для его алгоритма в случае $w = 1$, полученную в работе [3].

Вначале заметим, что число прямоугольников с шириной $\geq \frac{d-1}{d}$ имеет мат. ожидание, равное $O(\sqrt{N})$.

В работе [3] Трушниковым была доказана следующая Лемма:

Лемма 1. Пусть случайная величина $X = \sum_{i=1}^d X_i$, где $X_i = \xi_i \eta_i$, где ξ_i принимает значения 1 с вероятностью p и 0 с вероятностью $1-p$, η_i -равномерно распределена на отрезке $[0,1]$. Также все η_i и ξ_j - независимы в совокупности. Тогда $\forall a \in (0,1)$ выполнено неравенство:

$$P\{X > (1+a)EX\} \leq e^{-\frac{5}{9}a^2 EX}$$

Рассмотрим динамический процесс выпадения прямоугольников.

Лемма 2. Пусть выпало $N - 2N^{\frac{3}{4}}\sqrt{2C \ln N}$ прямоугольников. Тогда

$$E\{\text{мощности переполнения}\} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty).$$

Доказательство. Покажем, что $Pr\{\text{в полосу попало несколько прямоугольников суммарной высотой более } U-1\} < \frac{1}{N^{2.1}}$. Отсюда получим,

что $Pr\{\text{переполнение имеет место}\} < \frac{1}{N^{1.1}}$. А значит, $E(\text{переполнения}) <$

$$\frac{1}{N^{0.1}} \rightarrow 0 (N \rightarrow \infty).$$

Зафиксируем полосу. Найдём вероятность того, что в неё попало несколько прямоугольников суммарной высотой более чем $U - 1$. Если это не так, то переполнения в полосе в отсутствие переполнений в других полосах точно нет.

Вычислим a из условия $U - 1 = E(X)(1 + a)$. $E(X) = \frac{N - 2N^{\frac{3}{4}}\sqrt{2C\ln N}}{2d(N)}$.

В результате элементарных преобразований, получим, что $a = \frac{2N^{\frac{3}{4}}\sqrt{2C\ln N}}{2N - 2N^{\frac{3}{4}}\sqrt{2C\ln N}} = (1 + o(1))2N^{-\frac{1}{4}}\sqrt{2C\ln N}$.

$$\exp\{-\frac{5}{9}a^2E(X)\} = \exp\{-\frac{5}{9} * 4N^{-\frac{1}{2}}2C\ln N(\frac{1}{2}\frac{N}{d(N)})(1 + o(1))\} < N^{-2.1}$$

для достаточно больших N . ■

Лемма 3. Пусть упаковали $N - \lfloor N^{\frac{1}{2}+b} \rfloor$ прямоугольников, $\frac{\ln \ln 10N}{\ln N} \leq b \leq \frac{1}{4}$. Зафиксируем $\gamma = 2b - \frac{\ln(10\ln N)}{\ln N}$. Тогда вероятность того, что каждая из $\lfloor dN^{-\gamma} \rfloor$ самых широких полос заполнена до высоты $U - 1$ равна $O(N^{-1.1})$.

Доказательство. Сначала покажем, что вероятность того, что в любые $\lfloor dN^{-\gamma} \rfloor$ подряд идущих контейнеров выпали прямоугольники суммарной высотой $\geq (U - 1)\lfloor dN^{-\gamma} \rfloor$ равна $O(N^{-2.1})$. Далее заметим, что в каждые подряд идущие группы по $\lfloor dN^{-\gamma} \rfloor$ контейнеров выпали прямоугольники суммарной высотой $(U - 1)\lfloor dN^{-\gamma} \rfloor$ с вероятностью $\leq N^{-1.1}$. Предположим, что s самых широких контейнеров заполнены выше, чем на $U - 1$, где $s \geq \lfloor dN^{-\gamma} \rfloor$. Рассмотрим множество M , состоящее из $\lfloor dN^{-\gamma} \rfloor$ самых узких из них. Так как высота заполнения $(s + 1)$ -ого по ширине контейнера ниже, чем $U - 1$, то в M попали прямоугольники суммарной высотой $\geq (U - 1)\lfloor dN^{-\gamma} \rfloor$. Получили противоречие. Значит, хотя бы один из самых широких $\lfloor dN^{-\gamma} \rfloor$ контейнеров заполнен ниже высоты $U - 1$.

Итак, зафиксируем $\lfloor dN^{-\gamma} \rfloor$ контейнеров. Пусть высота X выпавших в них прямоугольников превосходит $(U - 1)\lfloor dN^{-\gamma} \rfloor$. Оценим вероятность этого события с помощью Леммы 1.

$$EX = \frac{N - \lfloor N^{\frac{1}{2}+b} \rfloor}{2d} \lfloor dN^{-\gamma} \rfloor$$

Найдём a из условия $(1 + a)EX = (U - 1)\lfloor dN^{-\gamma} \rfloor$: $a = \frac{\lfloor N^{\frac{1}{2}+b} \rfloor - 2d}{N - \lfloor N^{\frac{1}{2}+b} \rfloor} \geq \frac{N^{\frac{1}{2}+b} - 2d - 1}{N - N^{\frac{1}{2}+b} + 1}$.

И из леммы 1) вероятность того, что контейнеры заполнены выше $U - 1$ не превосходит

$$\exp(-\frac{5}{9}(\frac{N^{\frac{1}{2}+b} - 2d - 1}{N - N^{\frac{1}{2}+b} + 1})^2 \frac{(N - 2d)\lfloor dN^{-\gamma} \rfloor}{d}) \leq \exp(-\frac{4}{9} \frac{N^{2+2b-\gamma}}{N^2}) \leq \frac{1}{N^{-2.1}}$$

для достаточно больших N , что и требовалось доказать. ■

Назовём отрезком $[S, T], T > S$ множество прямоугольников, выпавших строго после $-$ го и до T -го прямоугольника включительно.

Мы получим требуемую оценку, если покажем, что мат. ожидание числа прямоугольников из отрезка $[N - 2N^{\frac{3}{4}}\sqrt{2C\ln N}, N - \sqrt{N}]$, попавших в переполнение равно $O(\sqrt{N}\ln N)$. Это и доказывается в следующей лемме.

Лемма 4. Мат. ожидание числа прямоугольников из отрезка $[N - 2N^{\frac{3}{4}}\sqrt{2C\ln N}, N - \sqrt{N}]$, попавших в переполнение равно $O(\sqrt{N}\ln N)$.

Рассмотрим 1-ый отрезок: $[N - N^{\frac{1}{2} + \frac{\ln \ln 10N}{\ln N}}, N - N^{\frac{1}{2}}]$. В него попало не более, чем $N^{\frac{1}{2} + \frac{\ln \ln 10N}{\ln N}} = \exp(\ln \ln 10N)\sqrt{N} = O(\sqrt{N}\ln N)$ прямоугольников.

Рассмотрим 2-ой отрезок: $[N - N^{\frac{1}{2} + 2\frac{\ln \ln 10N}{\ln N}}, N - N^{\frac{1}{2} + \frac{\ln \ln 10N}{\ln N}}]$. В него попало не более, чем $N^{\frac{1}{2} + 2\frac{\ln \ln 10N}{\ln N}}$ прямоугольников. Вероятность же для прямоугольника не попасть в один из $dN^{-\gamma} = dN^{-\frac{\ln \ln 10N}{\ln N}}$ самых широких контейнеров, и, таким образом, попасть в переполнение с вероятностью не более $\frac{1}{N^{1.1}}$, равна $N^{-\frac{\ln \ln 10N}{\ln N}}$. Таким образом,

$$E\{\text{числа прямоугольников из данного отрезка в переполнении}\} =$$

$$O(N^{\frac{1}{2} + \frac{\ln \ln 10N}{\ln N}}) = O(\sqrt{N} \ln N)$$

Зафиксируем $i_{\max} = [\frac{1}{4} \ln N / \ln \ln 10N] + 1$.

Рассмотрим $-$ ый отрезок, где $(j = \overline{3, i_{\max}})$: $[N - N^{\frac{1}{2} + j\frac{\ln \ln 10N}{\ln N}}, N - N^{\frac{1}{2} + (j-1)\frac{\ln \ln 10N}{\ln N}}]$. В него попало не более, чем $N^{\frac{1}{2} + j\frac{\ln \ln 10N}{\ln N}}$ прямоугольников. Вероятность же для прямоугольника не попасть в один из $dN^{-\gamma} = dN^{-(2j-3)\frac{\ln \ln 10N}{\ln N}}$ самых широких контейнеров, и, таким образом, попасть в переполнение с вероятностью не более $\frac{1}{N^{1.1}}$, равна $N^{-(2j-1)\frac{\ln \ln 10N}{\ln N}}$. Таким образом, $E\{\text{числа прямоугольников из данного отрезка в переполнении}\} = O(N^{\frac{1}{2}}) = O(\sqrt{N})$. Всего же отрезков — $O(\ln N) \Rightarrow$ вклад данной области составляет $O(\sqrt{N}\ln N)$.

Рассмотрим последний отрезок: $[N - 2N^{\frac{3}{4}}\sqrt{2C\ln N}, N - N^{\frac{3}{4}}]$. В него попало не более, чем $2\sqrt{2C\ln N}N^{\frac{3}{4}}$ прямоугольников. Вероятность же для прямоугольника не попасть в один из $dN^{-\gamma} < ($ для достаточно больших $N) < dN^{-\frac{3}{8}}$ самых широких контейнеров, и, таким образом, попасть в переполнение с вероятностью не более $\frac{1}{N^{1.1}}$, не более, чем $N^{-\frac{3}{8}}$. Таким образом, $E\{\text{числа}$

прямоугольников из данного отрезка в переполнении} = $O(N^{\frac{1}{2}}) = O(\sqrt{N} \ln N)$.

■

Лемма доказана, а с ней получена требуемая оценка.

3. Упаковка прямоугольников в большое число полос

3.1 Постановка задачи

Пусть дана функция $k = k(N)$. Требуется упаковать N прямоугольников в k полубесконечных полос единичный ширины в онлайнном режиме. Длины сторон прямоугольников — случайные величины, равномерно распределённые на отрезке $[0, 1]$. Число прямоугольников N известно до выпадения первого прямоугольника.

Качество алгоритма упаковки будем оценивать, используя величину $E(S_{sp})$ -мат. ожидание площади полос, незаполненной прямоугольниками, в части полос, начинающейся от дна и заканчивающейся на самой большой высоте верхнего основания прямоугольника, помещённого в полосу.

3.2 Алгоритм А

Пусть $k(N)^2 \leq N$ для всех $N \geq N_0$. Зафиксируем некоторые $N > N_0$ и $k(N) = k$. Зададим число, равное $2k \lceil \frac{\sqrt{N}}{k} \rceil$. Разделим нижнюю область 1-ой полосы высотой $\frac{N}{4d}$ на два контейнера шириной $\frac{1}{d+1}$ и $\frac{d}{d+1}$. Над данной областью выделим следующую область той же высоты, которую разобьём на 2 контейнера шириной $\frac{2}{d+1}$ и $\frac{d-1}{d+1}$. Аналогично выделим ещё несколько областей той же высоты, чтобы всего их число стало $\lceil \frac{\sqrt{N}}{k} \rceil$, и каждую из полос разобьём на 2 контейнера так, чтобы два контейнера, граничащих по вертикальной стороне, дополняли бы друг друга до области и ширина узких контейнеров из области бы равнялась $\frac{i}{d+1}$, $i = 1, \lceil \frac{\sqrt{N}}{k} \rceil$.

Аналогично разобьём вторую и следующие за ней области до высоты $\frac{N}{4k}$, причём ширина самых узких контейнеров из области будет равна $\frac{(j-1)\lceil \frac{\sqrt{N}}{k} \rceil + i}{d+1}$, $i = 1, \lceil \frac{\sqrt{N}}{k} \rceil$.

В эти контейнеры будем укладывать прямоугольники следующим образом:

- 1) Прямоугольник кладётся в контейнер наименьшей ширины, в который он помещается.
- 2) Если же он никуда не помещается, так как все контейнеры, ширина которых больше ширины прямоугольника, не могут его вместить, то

назовём прямоугольник прямоугольником переполнения 1-го рода. Суммарную высоту всех таких прямоугольников обозначим за h_1 .

- 3) Если же ширина прямоугольника больше, чем $\frac{d-1}{d}$, то назовём прямоугольник прямоугольником переполнения 2-го рода. Суммарная высота этих прямоугольников равна h_2 .
- 4) Начнём последовательно упаковывать прямоугольники по полосам. Высотой полосы назовём величину, равную высоте самой высокой точки, принадлежащей замыканию одного из прямоугольников или контейнеров, лежащих в данной полосе. Предполагая, что разбиение полос на контейнеры выполнено до выпадения первого прямоугольника, очередной прямоугольник переполнения кладётся в одну из полос с минимальной высотой на верхнюю грань самого высокого алгоритма.

3.3 Оценка математического ожидания площади свободного пространства

Докажем, что $E(S_{sp}) = O(\sqrt{N} \ln N)$. Очевидно следующее утверждение и следствие из него:

Утверждение. Если $b \leq a$, то $\frac{a}{2} \leq b \lceil \frac{a}{b} \rceil \leq a$.

Следствие. $\sqrt{N} \leq 2k \lceil \frac{\sqrt{N}}{k} \rceil \leq 2\sqrt{N}$.

Заметим, что алгоритм A_1 упаковки в 1 полосу, пакующий прямоугольники в те же контейнеры, что и описанный ранее алгоритм, а прямоугольники переполнения кладущий один поверх другого, является алгоритмом типа алгоритма Трушникова и удовлетворяет требованиям из модифицированного доказательства Трушникова, а значит верно следующее:

- 1) $E\{\text{площади незаполненного прямоугольниками пространства внутри контейнеров}\} = O(\sqrt{N} \ln N)$.
- 2) $E(h_1 + h_2) = O(\sqrt{N} \ln N)$.

Теперь рассмотрим алгоритм A упаковки во много полос. Обозначим за H разность высот самой высокой точки прямоугольников переполнения и высоты верхней стороны верхнего контейнера, равной $\frac{N}{4k}$. Если в переполнение не попали прямоугольники, то данная величина равна 0.

Так как любая полоса, по построению, заполнена не ниже $H - 1$, то $(H - 1)k \leq h_1 + h_2$. Стало быть, $E(kH) = O(\sqrt{N} \ln N)$.

Для алгоритма A : $E(S_{sp}) \leq E\{\text{площади незаполненного прямоугольниками пространства внутри контейнеров}\} + Hk = O(\sqrt{N} \ln N)$, что и требовалось доказать.

Список литературы

- [1]. Coffman E.G., Jr, Shor P.W. Packing in two dimensions: Asymptotic average-case analysis of algorithms. *Algorithmica*, vol. 9, No 3, pp. 253-277
- [2]. М.А. Трушников. Об одной задаче Коффмана-Шора, связанной с упаковкой прямоугольников в полосу. Труды ИСП РАН, том 22, 2012, стр. 456-462. DOI: 10.15514/ISPRAS-2012-22-24
- [3]. М.А. Трушников. Вероятностный анализ нового алгоритма упаковки прямоугольников в полосу. Труды ИСП РАН, том 24, 2013, стр. 457-468, DOI: 10.15514/ISPRAS-2013-24-21
- [4]. С.Н. Жук. Анализ некоторых эвристик в задаче упаковки прямоугольников в несколько полос. Труды ИСП РАН, том 6, 2005, стр. 13-26

An algorithm for Multiple Strip Package and its average case evaluation

² D.O. Lazarev <dennis810@mail.ru>

^{1,2} N. N. Kuzyrin <nnkuz@ispras.ru>

¹ *Ivannikov Institute for System Programming of the Russian Academy of Sciences, 25, Alexander Solzhenitsyn st., Moscow, 109004, Russia*

² *Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudnyj, Institutskij alley, Moscow region, 141700, Russia*

Abstract. In 2012 M.A. Trushnikov suggested a new online method for 2DSP Problem. The average case evaluation for a 2DSP algorithm equals the expected value of space of strip not filled with rectangles. In 2013 the average case evaluation for this method was attained and it equaled $O(\sqrt{N}(\ln N)^2)$. The best known before evaluation $O(N^2)$ was improved. In present article this evaluation was improved to $O(\sqrt{N} \ln N)$. Also a new method was constructed for MSP Problem, where N rectangles are packed in k strips, $k \leq \sqrt{N}$, with average case evaluation equaling $O(\sqrt{N} \ln N)$.

Keywords: new heuristic, Strip Packing problem, Multiple Strip Packing problem, average case evaluation.

DOI: 10.15514/ISPRAS-2017-29(6)-13

For citation Lazarev D.O., Kuzyrin N.N. An algorithm for Multiple Strip Package and its average case evaluation. *Trudy ISP RAN/Proc. ISP RAS*, vol. 29, issue 6, 2017. pp. 221-228 (in Russian). DOI: 10.15514/ISPRAS-2017-29(6)-13

References

- [1]. Coffman E.G., Jr, Shor P.W. Packing in two dimensions: Asymptotic average-case analysis of algorithms. *Algorithmica*, vol. 9, No 3, pp. 253-277
- [2]. M. A. Trushnikov. On one problem of Koffman-Shor connected to strip packing problem. *Trudy ISP RAN/Proc. ISP RAS*, vol. 22, 2012, pp. 456-462 (in Russian). DOI: 10.15514/ISPRAS-2012-22-24
- [3]. M. A. Trushnikov. Probabilistic analysis of a new strip packing algorithm. *Trudy ISP RAN/Proc. ISP RAS*, vol. 24, 2013, pp. 457-468 (in Russian). DOI: 10.15514/ISPRAS-2013-24-21
- [4]. S.N. Zhuk. Analysis of some heuristics in Multiple Strip Package Problem. *Trudy ISP RAN/Proc. ISP RAS*, vol. 6, 2004, pp. 13-26 (in Russian)