

Численное исследование влияния формы торцов колеблющихся пластин на гидродинамическое сопротивление в диапазоне больших амплитуд колебания

А.Н. Нуриев <nuriev_an@mail.ru>

А.М. Камалутдинов <islamui@hotmail.com>

О.Н. Зайцева <olga_fdpi@mail.ru>

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,
420008, Россия, Казань, Кремлёвская, д. 18*

Аннотация. В работе проводится численное моделирование обтекания гармонически осциллирующих тонких пластин с разной формой торцов в диапазоне чисел Рейнольдса $10 < Re < 600$. Для описания движения жидкости решается полная нестационарная система уравнений Навье-Стокса. Задача рассматривается в плоской постановке. Численная модель реализуется на базе открытой платформы OpenFOAM. Рассматривается вопрос о влиянии формы торцов на гидродинамическое сопротивление в режимах с интенсивным вихреобразованием. Проводится анализ структуры течения, распределения давления по поверхности пластин, выполняется расчет коэффициентов сопротивления для разных амплитуд колебания. Результаты исследования показывают, что изменение формы торцов приводит к смещению точек отрыва вихрей с пластины. Это сказывается на распределении давления по поверхности пластины. Так у усеченных пластин разница между измеренным давлением на правой и левой сторонах пластины в окрестности торцов оказывается меньше, чем у прямоугольных. Это, в конечном счете, приводит к снижению результирующего аэродинамического сопротивления усеченных пластин. В рассматриваемом диапазоне параметров значения коэффициента сопротивления для прямоугольной пластины лежат в среднем на 14% выше. Полученные результаты хорошо объясняют большой разброс данных между проведенными ранее экспериментальными и численными исследованиями, так как практически во всех численных исследованиях сечение пластины принимают прямоугольным. В тоже время в экспериментах обычно используются образцы с усеченными торцами. Соответствующие данные для каждого из этих типов пластин хорошо согласуются с полученными в рамках данного исследования результатами.

Ключевые слова: вязкая жидкость; тонкие пластины; гармонические осцилляции; коэффициент гидродинамического сопротивления; форма торцов, численное моделирование

DOI: 10.15514/ISPRAS-2018-30(1)-12

Для цитирования: Нуриев А.Н., Камалутдинов А.М., Зайцева О.Н. Численное исследование влияния формы торцов колеблющихся пластин на гидродинамическое сопротивление в диапазоне больших амплитуд колебания. Труды ИСП РАН, том 30, вып. 1, 2018 г., стр. 183-194. DOI: 10.15514/ISPRAS-2018-30(1)-12

1. Введение

Первые исследования взаимодействия осциллирующих пластин с неподвижной вязкой жидкостью проводились еще в 60 - 70-х года прошлого века в связи с изучением воздействия волн на элементы конструкций при морском строительстве. Реализованные в этот период гидродинамические эксперименты [1], [2] и созданные на базе них модели вихревого взаимодействия [3], позволили определить основные параметры задачи, порядок гидродинамических сил и структуры течений, создаваемых в жидкости осциллирующими пластинами, для области больших амплитуд колебания. Для случая малых амплитуд колебания в это же время была сформулирована [4] обобщенная на случай тонких пластин линеаризованная теория Стокса. Долгое время эти результаты составляли основную базу по оценке воздействия среды на осциллирующие пластины. Однако, развитие новых прикладных областей, таких как атомная микроскопия и робототехника, разработка наноэлектрических устройств и пьезоэлектрических микро-вентиляторов, создание новых методов оценки демпфирующих свойств материалов [5]-[7], дало толчок к дальнейшему развитию и расширению исследования данной проблематики.

В современный период исследования задача взаимодействия осциллирующих пластин с неподвижной вязкой жидкостью часто рассматривается в контексте проблемы определения аэродинамического демпфирования свободных или вынужденных колебаний удлиненных консольно-закрепленных балок прямоугольного поперечного сечения. В предположении, что длина балок существенно превышает их ширину и толщину, взаимодействие балок с воздухом рассматривается в рамках квазидвумерной гипотезы, согласно которой аэродинамические силы определяются в каждом сечении балки путем изучения плоского движения газа, вызванного гармоническими осцилляциями тонкой жесткой пластины. Такой подход лег в основу многочисленных экспериментальных и численных исследований [5]-[11], проводимых в последнем десятилетии.

Экспериментальные данные (см., например, [1], [6]) в целом указывают на широкие границы применимости двумерных (или квазидвумерных в случае балки) моделей обтекания пластин ($Re < 1000$). В то же время результаты численного моделирования при относительно высоких числах Рейнольдса ($Re : 1000$) [5], [10], дают завышенные оценки (на 20-30%) аэродинамического сопротивления по сравнению с данными экспериментов.

Результаты настоящего исследования показывают, что в корне этих проблем лежат упрощенные предположения (используемые в численных моделях) о геометрии сечения пластины.

Практически во всех численных исследованиях сечение принимают бесконечно тонким (см. например [10]) или прямоугольным (см. например [5], [8]). В тоже время в экспериментах обычно используются образцы (конечных размеров) с усеченными торцами [1], [6]. Как показывают настоящие расчеты эта, казалась бы незначительная, деталь имеет большое значение для режимов с интенсивным вихреобразованием, где форма торцов определяют точку отрыва вихрей.

2. Постановка задачи.

Пластина шириной b и толщиной h совершает колебания в горизонтальной плоскости в вязкой несжимаемой жидкости по гармоническому закону

$$s = A \sin \omega t,$$

где s – горизонтальные перемещения, A, ω амплитуда и частота колебаний соответственно.

При нормировке пространственных координат, времени и скорости на $b/2$, $b/2/U_0$, $-U_0$ соответственно (где U_0 – амплитуда скорости колебаний), система уравнений движения жидкости записывается в декартовой системе координат как

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + U \cdot \nabla U = -\nabla p + \frac{2}{\text{Re}} \Delta U, \\ \nabla \cdot U = 0 \end{cases}, \quad (1)$$

где $U = U(u, v)$ – безразмерная скорость, p – безразмерное давление, Re – число Рейнольдса, ν – кинематическая вязкость жидкости. Уравнение движения цилиндра в нормированных переменных записываются в виде

$$s = \frac{KC}{\pi} \sin(\pi t / KC). \quad (2)$$

Здесь $KC = 2U_0\pi / b\omega = 2\pi A / b$ – второй безразмерный управляющий параметр задачи – число Кейлигана-Карпентера или безразмерная амплитуда колебаний.

Безразмерная толщина пластины h/b является третьим безразмерным параметром задачи, в настоящем исследовании считается постоянной и равной $1/10$ (как и в экспериментальной работе [6]).

Таким образом, комплекс из двух параметров (Re, KC) полностью определяет течение жидкости около осциллирующей пластины. Иногда удобно использовать также их отношение

$$\beta = \frac{\text{Re}}{KC} = \frac{b^2 \omega}{2\pi\nu},$$

играющее роль колебательного числа Рейнольдса.

Для численного решения задачи (1), (2) осуществляется переход в подвижную систему координат связанную с пластиной. В этом случае для сохранения системы движения в форме (1) в новой неинерциальной системе координат определяется новое давление:

$$p = p_0 + x \sin(\pi t / KC) \pi / KC.$$

Здесь первое слагаемое p_0 – давление в неподвижной системе координат, а второе вклад от инерциальных составляющих.

На границе пластины в новой системе координат задаются условия прилипания:

$$u = v = 0.$$

На бесконечности изменение скорости определяется по следующему гармоническому закону:

$$u = \cos(\pi t / KC), \quad v = 0.$$

Вычисление гидродинамических сил, действующих на пластину со стороны жидкости, в представленной безразмерной постановке проводится по формуле:

$$F = \int_S p n ds - \int_S \bar{\sigma} \cdot n ds,$$

где $\bar{\sigma}$ – тензор вязких напряжений, S – поверхность цилиндра, n – внутренняя нормаль к поверхности пластины.

Полученный таким образом вектор силы F можно разложить на вертикальную составляющую F_y – подъемную силу, и горизонтальную F_x , стоящую и из сил сопротивления и инерциальных сил. Инерциальные составляющие возникают вследствие ускорения жидкости и состоят из двух частей: силы инерции присоединенных масс, возникающей из-за локального ускорения вблизи пластины и силы Фруда-Крылова, которая связана с градиентом давления, созданным в жидкости для моделирования осциллирующего потока.

Для аппроксимации влияния инерциальных и вязких составляющих горизонтальной силы используется формула Морисона [12]:

$$F_x = \pi C_m \frac{du_\infty}{dt} + C_d |u_\infty| u_\infty,$$

где u_∞ – скорость жидкости на бесконечности, C_m – коэффициент инерциальных сил, C_d – коэффициент сопротивления.

3. Численное решение.

Численное решение задачи проводится в пакете OpenFOAM [13] на основе расчетной схемы описанной в [14]. Течение моделируется в прямоугольной области размерами 60×40 , в центре которой располагается исследуемая пластина. В используемой декартовой системе координат (Ox, Oy), стороны расчетной области параллельны основным осям, колебания происходят вдоль оси Ox .

Для дискретизации расчетной области используются блочные сетки двух типов. Первый тип – структурированные сетки. Повышение разрешающей способности вблизи пластины на этих сетках достигается за счет линейного сгущения узлов в направлении нормалей к сторонам пластины. Это обеспечивает плавное постепенное изменение размера ячеек в области. На сетках второго типа помимо сгущения используется дробление ячеек в окрестности границ, что приводит к нарушению условия регулярности и достаточно резкому изменению размеров ячеек в зоне стыковки измельченной и основной сетки. Однако это позволяет существенно повысить разрешающую способность, не увеличивая многократно общее количество ячеек расчетной сетки. Максимальное количество ячеек используемых расчетных сеток достигает $3 \cdot 10^5$.

Дискретизация системы уравнений движения жидкости проводится по методу конечных объемов (FVM) в декартовой системе координат. Дискретные значения составляющих скорости и дискретные давления локализуются в центрах ячеек расчетных сеток. Для вычисления объемных интегралов по контрольному объему используется общая процедура Гаусса. Для аппроксимации градиента давления в расчетах применяется линейная интерполяция. В диффузионных слагаемых при дискретизации оператора Лапласа нормальные градиенты скорости на поверхности ячейки аппроксимируются с помощью симметричной схемы второго порядка с поправкой на неортогональность (в случае пластины с острыми торцами) [13], [14].

Для интерполяции переменных в конвективных слагаемых используется гибридная схема Спалдинга предложенная в работах [15] (аналог широко применяемой в конечно-элементной дискретизации схемы «Streamline upwind»). Она представляет собой комбинацию линейной и противоточной интерполяций. Линейная интерполяция применяется в области, где сеточное число Рейнольдса (или число Пекле) $Re_h < 2$. Применение схемы, однако, требует особой аккуратности, первый порядок точности противоточной интерполяции может привести к существенному влиянию на решение численной диффузии. Как показывают результаты работ [16]-[18], для рассматриваемого класса задач, гибридная схема обеспечивает хорошее согласование численных результатов с экспериментальными данными в

широком диапазоне чисел Рейнольдса. Негативное влияние численной диффузии при этом можно минимизировать повышением разрешающей способности сетки вблизи обтекаемого тела и контролировать посредством изучения сеточной сходимости.

Для дискретизации системы уравнений по времени используется неявная схема Эйлера. Шаг по времени во всех расчетах выбирается из условия – максимальное число Куранта не превышает значения 0.1.

Решение дискредитированной задачи проводится с помощью метода PISO [19] (в реализации, изложенной в [14]). Решение системы уравнений для давления выполняется на основе метода сопряженных градиентов (PCG) с геометро-алгебраическим многосеточным предобуславливателем (GAMG). Системы уравнений для компонент скорости решается методом бисопряженных градиентов (PBICG) с предиктором на основе неполной LU факторизации. Расчеты выполняются распределенным образом по технологии MPI с применением метода декомпозиции области решения.

4. Результаты

Для получения представления о влиянии формы торцов пластин на сопротивление в режимах с интенсивным вихреобразованием рассмотрим диапазон больших амплитуд колебания $4 \leq KC \leq 10$.

Течение вокруг пластины в этом диапазоне имеет периодический отрывной характер (см. рис. 1). На каждом полупериоде с пластины срывается пара вихрей. Срывы поочередно происходят противоположных углов пластины, за это режим часто называют диагональным [1], [3].

Как видно по рис. 1, структура течений вокруг усеченной и прямоугольной пластин в целом остается очень похожей, в частности идентичными остаются структура, размеры и положение, формируемых около пластин вихревых пар. Однако в окрестности торцов пластин все же наблюдаются видимые различия течения, связанные с изменением точек отрыва потока: для усеченных пластин – это вершина острого угла, у пластин с прямоугольным поперечным сечением отрыв происходит в вершине прямого угла со стороны набегающего потока.

Этот фактор сказывается на распределении давления по поверхности пластины (рис. 2). У усеченных пластин разница между давлением на правой и левой сторонах пластины в окрестности торцов меньше, чем у прямоугольной. Это, в конечном счете, приводит к снижению результирующего аэродинамического сопротивления пластины.

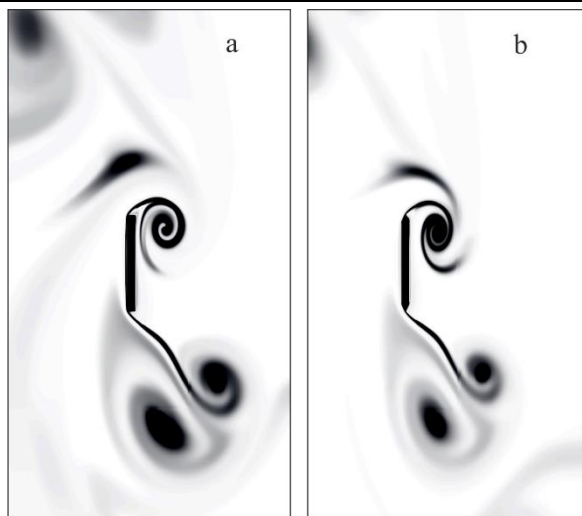


Рис. 1. Структура течения вблизи пластин при $\beta = 55$, $KC = 7$. а - прямоугольная пластина, б – усечённая пластина. Визуализация с помощью краски
The flow structure near the plates at $\beta = 55$, $KC = 7$. а is a rectangular plate, б is a truncated plate. Visualization using paint

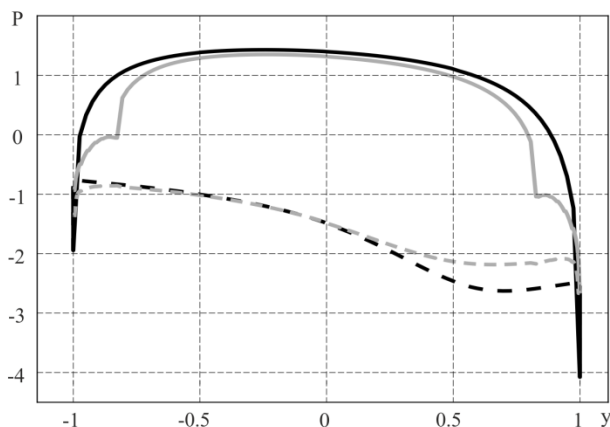


Рис. 2. Распределение давления на пластине при $\beta = 55$, $KC = 7$. Чёрная линия - прямоугольная пластина, серая линия – усечённая пластина. Пунктирная линия – левая сторона пластины, сплошная линия – правая сторона

Fig. 2. The pressure distribution on the plate at $\beta = 55$, $KC = 7$. The black line is a rectangular plate, the gray line is a truncated plate. The dashed line is the left side of the plate, the solid line is the right side

Графики изменения коэффициента сопротивления C_d в зависимости от KC для пластин с разной формой торцов представлены на рис. 3.

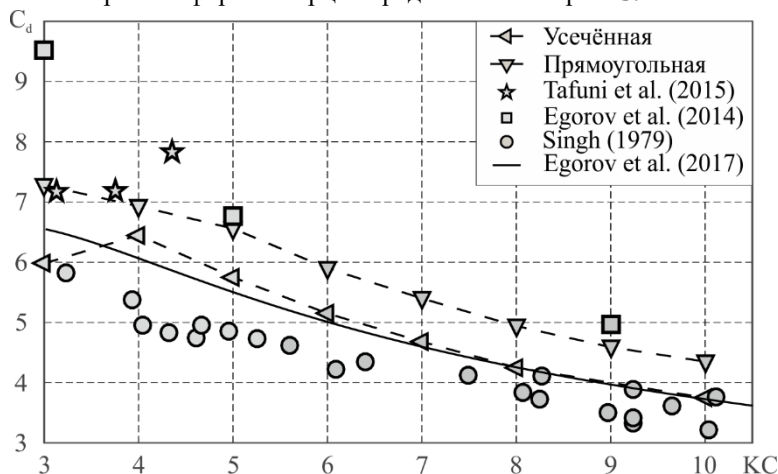


Рис. 3. Зависимость C_d от KC

Fig. 3. Dependence C_d on KC

Как видно, рассчитанные значения коэффициентов сопротивления для усеченной пластины хорошо согласуются с экспериментальными данными [1],[6], полученными для образцов с аналогичной геометрией. В тоже время как значения коэффициента сопротивления для прямоугольной пластины лежат в среднем на 14% выше в области большинства полученных ранее результатов численного моделирования [5], [10].

Список литературы

- [1]. Singh S. Forces on Bodies in Oscillatory Flow. Phd thesis, University of London, 1979.
- [2]. Keulegan G.H., Carpenter L.H. Forces on cylinders and plate in an oscillating fluid. *Journal of Research of National Bureau of Standards*, vol. 60, no. 5, pp. 423 – 440, 1958. DOI: 10.6028/jres.060.043
- [3]. Graham J.M.R. The forces on sharp-edged cylinders in oscillatory flow at low Keulegan Carpenter numbers, *Journal of Fluid Mechanics*, vol.97, no. 02, pp. 331 – 346, 1980. DOI: 10.1017/s0022112080002595
- [4]. Tuck E.O. Calculation of unsteady flows due to small motions of cylinders in a viscous fluid. *Journal of Engineering Mathematics*, vol.3, no. 1, pp. 29 – 44, 1969. DOI: 10.1007/BF01540828
- [5]. Егоров А.Г., Камалутдинов А.М., Нуриев А.Н., Паймушин В.Н. Теоретико-экспериментальный метод определения параметров демпфирования на основе исследования затухающих изгибных колебаний тест-образцов: 2. Аэродинамическая составляющая демпфирования. *Механика композитных материалов*, 2014, том 50, вып. 3, стр. 379-396. DOI: 10.1007/s11029-014-9413-3

- [6]. Егоров А.Г., Камалутдинов А.М., Нуриев А.Н., Паймушин В.Н. Экспериментальное определение демпфирования колебаний пластины вязкой жидкостью. Доклады Академии наук, 2017, том 474, вып. 2, стр. 172-176 DOI: 10.7868/S0869565217140079
- [7]. Егоров А.Г., Камалутдинов А.М., Паймушин В.Н., Фирсов В.А. Теоретико-экспериментальный метод определения коэффициента аэродинамического сопротивления гармонически колеблющейся тонкой пластины. Прикладная механика и техническая физика, 2016, том 57, вып. 2 (336), стр. 96-104. DOI: 10.15372/PMTF20160210
- [8]. Aureli M., Porfiri M. Low frequency and large amplitude oscillations of cantilevers in viscous fluids *Applied Physics Letters*, vol. 96, no. 16, p. 164102, 2010. DOI: 10.1063/1.3405720
- [9]. Aureli M., Porfiri M., Basaran M.E. Nonlinear finite amplitude vibrations of sharp-edged beams in viscous fluids. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 331, no. 7, pp. 1624 – 1654, 2012. DOI: 10.1016/j.jsv.2011.12.007
- [10]. Tafuni A., Sahin. I. Non-linear hydrodynamics of thin laminae undergoing large harmonic oscillations in a viscous fluid. *Journal of Fluids and Structures*, vol. 52, pp. 101 – 117, 2015. DOI: 10.1016/j.jfluidstructs.2014.10.004
- [11]. Jalalisendi M., Panciroli R., Cha Y., Porfiri M. A particle image velocimetry study of the flow physics generated by a thin lamina oscillating in a viscous fluid. *J. Appl. Phys.*, vol. 115, no. 5, p. 054901, 2014. DOI: 10.1063/1.4863721
- [12]. Morison J. R., Johnson J. W., Schaaf S. A. The Force Exerted by Surface Waves on Piles. *Journal of Petroleum Technology*, vol. 2, no. 05, pp. 149–154, 1950. DOI: 10.2118/950149-g
- [13]. Greenshields C. OpenFOAM User Guide. CFD Direct, Available: <https://cfd.direct/openfoam/user-guide/>, accessed 12.12.2017
- [14]. Нуриев А.Н., Зайцева О.Н. Решение задачи об осциллирующем движении цилиндра в вязкой жидкости в пакете OpenFOAM. Вестник Казанского технологического университета, 2013, том 16, No 8, стр. 116-123.
- [15]. Spalding D.B. A novel finite difference formulation for differential expressions involving both first and second derivatives. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 4, no. 4, pp. 551 –559, 1972. DOI: 10.1002/nme.1620040409
- [16]. Нуриев А.Н. Численное моделирование течений, возникающих около гармонически осциллирующего цилиндра, в диапазоне умеренных значений колебательного числа Рейнольдса. Материалы XI Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях. (NPNJ'2016) 25-31 мая 2016 г. Алушта, М: Изд-во МАИ, 2016, С. 260-261
- [17]. Justesen P. A numerical study of oscillating flow around a circular cylinder. *J. Fluid Mech*, vol. 222., pp. 157–196, 1991. DOI: 10.1017/S0022112091001040
- [18]. An H., Cheng L., Zhao M. Steady streaming around a circular cylinder in an oscillatory flow. *Ocean Engineering*, vol. 36, no. 14., pp. 1089–1097, 2009. DOI: 10.1016/j.oceaneng.2009.06.010
- [19]. Issa R.I. Solution of the implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting. *J. Comput. Phys*, 1986, vol. 62, no. 1, P. 40-65. DOI:10.1016/0021-9991(86)90099-9

Dependence of hydrodynamic forces acting on oscillating thin plates on the shape of edges in the range of large oscillation amplitudes.

A.N. Nuriev <nuriev_an@mail.ru>

A.M. Kamalutdinov <islamui@hotmail.com>

O.N. Zaitseva <olga_fdpi@mail.ru>

Kazan Federal University

18 Kremlyovskaya street, Kazan, Russia, 420008

Abstract. In this work, numerical simulation of the viscous flow past harmonically oscillating thin plates with different shapes of edges is carried out in the Reynolds number range $10 < Re < 600$. To describe the motion of a fluid, a complete nonstationary system of Navier-Stokes equations is solved. The problem is considered in a plane formulation. The numerical model is implemented on the basis of the open-source OpenFOAM package. The effect of the shape of edges on the hydrodynamic drag in regimes with intense vortex formation is considered. The structure of the flow and the pressure distribution over the plate surface are analyzed, the drag coefficient for different oscillation amplitudes is calculated. The results of the study show that the change of the shape of edges leads to the shift the flow separation points. This has noticeable effect on the pressure distribution on the plate surface. For truncated plates, the difference between the pressure distribution on the right and left sides of the plate in the vicinity of the edges is less than for the rectangular plate. This leads to a decrease the aerodynamic drag of the truncated plate. In the considered range of parameters the values of the drag coefficient for a rectangular plate lie (on the average) 14% higher. The obtained results well explain the large spread of data between the earlier experimental and numerical studies, since in almost all numerical studies the cross section of the plate is assumed rectangular. At the same time, samples, which are usually used in experiments, have truncated (triangular) edges. The corresponding data for each of these types of plates are in good agreement with the results obtained in this study.

Keywords: viscous fluid; thin plates; oscillatory motion; drag coefficient; edge shape; numerical simulation

DOI: 10.15514/ISPRAS-2018-30(1)-12

For citation: Nuriev A.N., Kamalutdinov A.M., Zaitseva O.N. Dependence of hydrodynamic force. *Trudy ISP RAN/Proc. ISP RAS*, vol. 30, issue 1, 2018, pp. 183-194 (in Russian). DOI: 10.15514/ISPRAS-2018-30(1)-12

References

- [1]. Singh S. Forces on Bodies in Oscillatory Flow. Phd thesis, University of London, 1979.
- [2]. Keulegan G.H., Carpenter L.H. Forces on cylinders and plate in an oscillating fluid. *Journal of Research of National Bureau of Standards*, vol. 60, no. 5, pp. 423 – 440, 1958. DOI: 10.6028/jres.060.043

- [3]. Graham J.M.R. The forces on sharp-edged cylinders in oscillatory flow at low Keulegan Carpenter numbers, *Journal of Fluid Mechanics*, vol.97, no. 02, pp. 331 – 346, 1980. DOI: 10.1017/s0022112080002595
- [4]. Tuck E.O. Calculation of unsteady flows due to small motions of cylinders in a viscous fluid. *Journal of Engineering Mathematics*, vol.3, no. 1, pp. 29 – 44, 1969. DOI: 10.1007/BF01540828
- [5]. Egorov A.G., Kamalutdinov A.M., Nuriev A.N., Paimushin V.N. Theoretical-experimental method for determining the parameters of damping based on the study of damped flexural vibrations of test specimens 2. Aerodynamic component of damping. *Mechanics of Composite Materials*, vol. 50, no. 3, pp. 267–278, 2014. DOI: 10.1007/s11029-014-9413-3.
- [6]. Egorov A.G., Kamalutdinov A.M., Nuriev A.N., Paimushin V.N. Experimental determination of damping of plate vibrations in a viscous fluid. *Doklady Physics*, vol. 62, no. 5, pp. 257 – 261, 2017. DOI: 10.1134/S1028335817050068
- [7]. Egorov A.G., Kamalutdinov A.M., Paimushin V.N., Firsov V.A. Theoretical-experimental method of determining the drag coefficient of a harmonically oscillating thin plate. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, vol. 57, no. 2, pp. 275 – 282, 2016. DOI: 10.1134/S0021894416020103
- [8]. Aureli M., Porfiri M. Low frequency and large amplitude oscillations of cantilevers in viscous fluids *Applied Physics Letters*, vol. 96, no. 16, p. 164102, 2010. DOI: 10.1063/1.3405720
- [9]. Aureli M., Porfiri M., Basaran M.E. Nonlinear finite amplitude vibrations of sharp-edged beams in viscous fluids. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 331, no. 7, pp. 1624 – 1654, 2012. DOI: 10.1016/j.jsv.2011.12.007
- [10]. Tafuni A., Sahin. I. Non-linear hydrodynamics of thin laminae undergoing large harmonic oscillations in a viscous fluid. *Journal of Fluids and Structures*, vol. 52, pp. 101 – 117, 2015. DOI: 10.1016/j.jfluidstructs.2014.10.004
- [11]. Jalalisendi M., Panciroli R., Cha Y., Porfiri M. A particle image velocimetry study of the flow physics generated by a thin lamina oscillating in a viscous fluid. *J. Appl. Phys.*, vol. 115, no. 5, p. 054901, 2014. DOI: 10.1063/1.4863721
- [12]. Morison J. R., Johnson J. W., Schaaf S. A. The Force Exerted by Surface Waves on Piles. *Journal of Petroleum Technology*, vol. 2, no. 05, pp. 149–154, 1950. DOI: 10.2118/950149-g
- [13]. Greenshields C. OpenFOAM User Guide. CFD Direct, Available: <https://cfd.direct/openfoam/user-guide/>, accessed 12.12.2017
- [14]. Nuriev A.N., Zaytseva O.N. Solution to the problem of oscillatory motion of a cylinder in a viscous fluid in the OpenFOAM package. *Heald of Kazan Technological University* vol. 16, no. 8, pp. 116-123, 2013.
- [15]. Spalding D.B. A novel finite difference formulation for differential expressions involving both first and second derivatives. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 4, no. 4, pp. 551 –559, 1972. DOI: 10.1002/nme.1620040409
- [16]. Nuriev A.N. Numerical simulation of the flow around the harmonically oscillating cylinder in the range of moderate vibrational Reynolds numbers. *Proceedings of the XI international conference on nonequilibrium processes in nozzles an jets*. Izdatelstvo MAI, Publishing House, pp. 260-261, 2016.
- [17]. Justesen P. A numerical study of oscillating flow around a circular cylinder. *J. Fluid Mech*, vol. 222., pp. 157–196, 1991. DOI: 10.1017/S0022112091001040

- [18]. An H., Cheng L., Zhao M. Steady streaming around a circular cylinder in an oscillatory flow. *Ocean Engineering*, vol. 36, no. 14., pp. 1089–1097, 2009. DOI: 10.1016/j.oceaneng.2009.06.010
- [19]. Issa R.I. Solution of the implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting. *J. Comput. Phys*, 1986, vol. 62, no. 1, P. 40-65. DOI:10.1016/0021-9991(86)90099-9