Вероятностный анализ нового алгоритма упаковки прямоугольников в полосу

М.А. Трушников, *ctgy@yandex.ru*

Аннотация. В 1993 году Коффман и Шор предложили онлайновый алгоритм упаковки прямоугольников в полосу с оценкой $O(N^{2/3})$ для математического ожидания незаполненной площади полосы в стандартной вероятностной модели. С тех пор вопрос о возможности улучшения этой оценки в классе онлайновых алгоритмов оставался открытым. В данной работе проанализирован принципиально новый онлайновый алгоритм упаковки, предложенный ранее автором. Для него доказана оценка $O(N^{1/2}(\log N)^{3/2})$ для математического ожидания незаполненной площади полосы.

Ключевые слова: онлайновый алгоритм упаковки, вероятностный анализ качества упаковки.

Введение

Задача упаковки в полосу (в англоязычной литературе Strip packing problem) состоит в размещении множества открытых прямоугольников внутри полубесконечной вертикальной полосы единичной ширины, при этом стороны прямоугольников должны быть параллельны сторонам полосы (вращения запрещены) и прямоугольники не должны пересекаться. Нужно минимизировать «высоту упаковки» --- расстояние от основания полосы до верхней грани верхнего прямоугольника в упаковке [1,2].

Задача имеет следующую естественную интерпретацию. Каждый прямоугольник --- вычислительная задача, ширина прямоугольника соответствует количеству процессоров необходимых для вычисления задачи, высота --- времени. Эффективное размещение прямоугольников внутри полосы требуется также в задачах разработки СБИС и раскройки материалов. Частным случаем упаковки в полосу при равенстве высот всех прямоугольников является NP-трудная задача упаковки в контейнеры [3]. Поэтому для общей задачи упаковки в полосу интерес представляют приближенные полиномиальные алгоритмы.

Особый интерес представляют «онлайновые» алгоритмы, размещающие прямоугольники в полосе по мере их поступления, без знания параметров всех последующих прямоугольников. При анализе **в среднем** минимизируемой функцией является математическое ожидание незаполненной прямоугольниками площади полосы от основания полосы до верхней грани самого верхнего прямоугольника в упаковке. При этом в стандартной вероятностной модели ширины и высоты всех прямоугольников являются независимыми в совокупности равномерно распределенными на $(0,1]$ случайными величинами [4].

Известно, что математическое ожидание незаполненной площади полосы у оптимальной упаковки есть $O(N^{1/2})$, где N --- число прямоугольников. В 1993 году Коффман и Шор предложили «офлайновый» (информация о всех прямоугольниках известна заранее) алгоритм [4], для которого по порядку достигается оценка $O(N^{1/2})$. В той же работе они предложили онлайновый алгоритм упаковки с оценкой $O(N^{2/3})$ для математического ожидания незаполненной площади полосы.

В 2010 году [5] был предложен новый онлайновый алгоритм с той же оценкой $O(N^{2/3})$, но не требующий знания числа прямоугольников заранее. Тем не менее вопрос о возможности улучшения оценки $O(N^{2/3})$ в классе онлайновых алгоритмов оставался открытым. Известно было, в частности, что в классе шельфовых алгоритмов [6], [7] эту оценку улучшить нельзя.

В данной работе дан положительный ответ на этот вопрос. Для принципиально нового онлайнового алгоритма упаковки из [8] доказана оценка $O(N^{1/2}(\log N)^{3/2})$ для математического ожидания незаполненной площади полосы.

Постановка задачи

1 ***Вход:*** N --- число прямоугольников; $w_i, h_i,\ i = 1,\ldots,N$ --- ширины и высоты прямоугольников, являющиеся значениями независимых в совокупности равномерно распределенных на $(0,1]$ случайных величин;

Выход: $x_i, y_i,\ i = 1,\ldots,N$ -- координаты центров прямоугольников, удовлетворяющие условию: прямоугольники без вращений и пересечений размещены внутри полубесконечной полосы единичной ширины. Основание полосы совпадает с отрезком $[(0,0),(1,0)]$ в R^2, а боковые стороны полосы параллельны оси y.

Высотой упаковки назовем величину

$$H = max_i\left(y_i + \frac{h_i}{2}\right).$$

Требуется минимизировать величину

$$S = H - \sum_{i=1}^{N} w_i * h_i,$$

равную незаполненной площади полосы.

Алгоритм

В [8] предложен новый онлайновый алгоритм для рассматриваемой задачи, который мы будем анализировать в данной работе. Нпомним некоторые особенности алгоритма.

Рассмотрим следующие величины:

$$d = \left\lfloor \frac{N/4}{\sqrt{N}} \right\rfloor,\ U = \frac{N/4}{d} = \sqrt{N} + O(1), \delta = \frac{1}{d}$$

В основании полосы выделается $d+1$ горизонтальная область, каждая высоты U, причем i-я область имеет ширину $i\delta$. Таким образом получаем две одинаковые пирамиды (одна из них перевернутая). Каждый четный прямоугольник будем упаковывать в одну пирамиду, каждый нечетный --- в другую.

Прямоугольники, из которых состоит пирамида будем называть **контейнерами**. Пронумеруем контейнеры внутри пирамиды числами от 1 до d так, что i-й имеет ширину $i\delta$. Прямоугольники внутри контейнеров будут упаковываться просто друг над другом: первый упаковываемый прямоугольник кладется на дно контейнера, следующий --- поверх первого и так далее.

Пусть некоторое количество прямоугольников упаковано в пирамиду и следующим для упаковки в данную пирамиду приходит прямоугольник ширины w.

- Найдем такое i, что $(i-1)\delta < w \le i\delta$. Будем говорить, что этот прямоугольник **назначен** в i-й контейнер (тем не менее он не обязательно будет упакован именно в i-й контейнер).
- Далее ищем минимальное такое j, что $i \le j \le d$ и в j-ом контейнере достаточно места, чтобы поместить туда данный прямоугольник.

- Если такое j существует --- помещаем данный прямоугольник в j-й контейнер.
- Если нет --- просто кладем прямоугольник сверху текущей упаковки. Такие прямоугольники, которым не нашлось места ни в одном из контейнеров, в которые они помещаются по ширине будем называть **выпавшими**.

Анализ алгоритма

Корректность и онлайновость алгоритма очевидны. Оценим математическое ожидание незаполненной площади полосы.

Теорема2. *Математическое ожидание незаполненной площади полосы упаковки, полученной алгоритмом из [8] есть* $O(N^{1/2}(\log N)^{3/2})$.

План доказательства теоремы. Обозначим за S суммарную площадь N прямоугольников. Ясно, что $\mathsf{E}S = N/4$. Высота выделенной части полосы есть

$$(d+1)U = N/4\left(\frac{d+1}{d}\right) = N/4 + \frac{N}{4\left\lfloor \frac{N/4}{\sqrt{N}} \right\rfloor} = N/4 + O(N^{1/2}).$$

Будем рассматривать только одну из двух пирамид и соответственно только $\lfloor N/2 \rfloor$ прямоугольников упакованных в эту пирамиду. Пронумеруем эти $\lfloor N/2 \rfloor$ прямоугольников числами от 1 до $\lfloor N/2 \rfloor$ в соответствии с порядком поступления прямоугольников на вход алгоритму.

Обозначим за $\mathsf{M}\{n_1, n_2\}$ математическое ожидание числа **выпавших** (смотри определение в описании алгоритма) прямоугольников при упаковке прямоугольников с номерами из диапазона $[n_1, n_2]$ в данную пирамиду.

Таким образом, для доказательства теоремы требуется доказать, что

$$\mathsf{M}\{1, \lfloor N/2 \rfloor\} = O(N^{1/2}(\log N)^{3/2}).$$

Определим 2 целых числа k_0 и k_1:

$$k_0 = \lfloor N/2 \rfloor - \lfloor N^{3/4}\sqrt{\log N} \rfloor, k_1 = \lfloor N/2 \rfloor - \lfloor N^{1/2} \rfloor.$$

$$\mathsf{M}\{1, \lfloor N/2 \rfloor\} = \mathsf{M}\{1, k_0\} + \mathsf{M}\{k_0+1, k_1\} + \mathsf{M}\{k_1+1, \lfloor N/2 \rfloor\}$$

Далее будут доказаны несколько лемм, из которых следует утверждение теоремы.

Лемма 1.

$$\mathsf{M}\{k_1+1,\lfloor N/2\rfloor\}=O(N^{1/2}).$$

Очевидно, так как $k_1=\lfloor N/2\rfloor-\lfloor N^{1/2}\rfloor$ и следовательно всего прямоугольников в этом диапазоне $O(N^{1/2})$.

Для любого прямоугольника вероятность быть назначенным (смотри определение в описании алгоритма) в каждый конкретный контейнер есть $1/d$, так как всего d контейнеров. Пусть в пирамиду было упаковано k прямоугольников. Зафиксируем любой контейнер пирамиды. Через $X_i, 1\le i\le k$ обозначим случайную величину, равную высоте i-го прямоугольника в случае, если i-й прямоугольник назначается в данный контейнер, и 0 иначе. Можно записать $X_i=\xi_i\eta_i$, где ξ_i --- случайная величина, равная 1 с вероятностью p и 0 и вероятностью $1-p$, а η_i --- равномерно распределенная на отрезке $(0,1]$ случайная величина. Введем $X=X_1+X_2+\ldots+X_k$ --- случайную величину, равную суммарной высоте прямоугольников, назначенных в данный контейнер, где k --- количество упакованных прямоугольников. Далее нам потребуется следующий вариант неравенства больших уклонений.

Лемма 2.

Пусть случайная величина $X=X_1+X_2+\ldots+X_k$, где $X_i=\xi_i\eta_i$, ξ_i принимает значение 1 с вероятностью p и 0 с вероятностью $1-p$, η_i --- равномерно распределенная на отрезке $(0,1]$ случайная величина, причем все случайные величины $\xi_i,\eta_i, i=1,\ldots,k$ независимы в совокупности. Тогда для любого α из интервала $(0,1)$ выполняется неравенство

$$\mathsf{P}\{X>(1+\alpha)\mathsf{E}X\}\le e^{-\frac{5}{9}\alpha^2\mathsf{E}X}.$$

Лемма 3.

$$\mathsf{M}\{1,k_0\}\to 0,\ \ N\to\infty$$

Доказательство. Оценим вероятность переполнения любого контейнера с помощью леммы 2. Для $k=k_0=\lfloor N/2\rfloor-\lfloor N^{3/4}\sqrt{\log N}\rfloor$

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{2}\left(\frac{k_0}{d}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\lfloor N/2\rfloor - \lfloor N^{3/4}\sqrt{\log N}\rfloor}{\frac{\sqrt{N}}{4} + O(1)}\right) = \sqrt{N} - 2N^{1/4}\sqrt{\log N} + O(1).$$

Возьмем α , удовлетворяющее равенству $U - 1 = (1+\alpha)\mathrm{E}X$.

$$\alpha = \frac{U - 1 - \mathrm{E}X}{\mathrm{E}X} = \frac{2N^{1/4}\sqrt{\log N}}{\sqrt{N} - 2N^{1/4}\sqrt{\log N}} + O(1)$$

Следовательно, по лемме 2

$$\mathrm{P}\{X > U - 1\} \le exp\left(-(5/9)\frac{(2N^{1/4}\sqrt{\log N} + O(1))^2}{N^{1/2} - 2N^{1/4}\sqrt{\log N} + O(1)}\right)$$

$$\le exp\left(-(5/9)\frac{4N^{1/2}\log N}{N^{1/2} - 2N^{1/4}\sqrt{\log N} + O(1)}\right).$$

Для достаточно больших N

$$\mathsf{P}\{X > U - 1\} < \frac{1}{N^{2.1}}.$$

Обозначим событие, соответствующее переполнению хотя бы одного любого контейнера за A, через A_i --- событие переполнения i-го контейнера,

$$A = \bigcup_{i=1}^{d} A_i$$

$$\mathsf{P}(A) \le \sum_{i=1}^{d}\mathsf{P}(A_i) < d\,\frac{1}{N^2} < \frac{1}{N^{1.1}}$$

Следовательно

$$\mathsf{M}\{1, k_0\} \to 0,\ \ N \to \infty.$$

Лемма 4.

Пусть алгоритмом было упаковано $\lfloor N/2\rfloor - \lfloor N^{1/2+\beta}\rfloor$ прямоугольников в одну пирамиду и $0 < \beta < 1/4$. Зафиксируем любое γ такое, что

$$1/2 - 2\beta + \frac{\ln(5\ln N)}{\ln N} \le \gamma < 1/2.$$

Обозначим через C --- событие, заключающееся в том, что хотя бы один из $\lceil N^{\gamma}\rceil$ ***нижних*** *контейнеров пирамиды заполнен не более чем на $U - 1$. Тогда для достаточно больших N*

$$P\{C\} \geq 1 - \frac{1}{N^{1.1}}$$

Доказательство. Рассмотрим **любые** $\lceil N^{\gamma} \rceil$ контейнеров пирамиды. Для $k = \lfloor N/2 \rfloor - \lfloor N^{1/2+\beta} \rfloor$ рассмотрим

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_k.$$

Где X_i --- высота i-го прямоугольника в случае, если он назначен в один из $\lceil N^{\gamma} \rceil$ рассматриваемых контейнеров пирамиды и 0 иначе.

$$\mathsf{E}X = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\lfloor N/2 \rfloor - \lfloor N^{1/2+\beta} \rfloor\right) \lceil N^{\gamma} \rceil}{d}$$

$$\mathsf{E}X \leq \frac{2\left(N/2 - N^{1/2+\beta} + 1\right) N^{\gamma}}{N^{1/2} - 1}$$

Докажем сначала для произвольного множества из $\lceil N^{\gamma} \rceil$ контейнеров пирамиды, что

$$P\left\{X > (U-1)\lceil N^{\gamma} \rceil\right\} < \frac{1}{N^{2.1}}.$$

Найдем α, которое удовлетворяет равенству

$$(U-1)\lceil N^{\gamma} \rceil = (1+\alpha)\mathrm{E}X.$$

$$\alpha = \frac{(U-1)\lceil N^{\gamma} \rceil - \mathrm{E}X}{\mathrm{E}X} = \frac{U - 1 - \dfrac{\lfloor N/2 \rfloor - \lfloor N^{1/2+\beta} \rfloor}{2d}}{\dfrac{\lfloor N/2 \rfloor - \lfloor N^{1/2+\beta} \rfloor}{2d}} = \frac{N/2 - 2d - \lfloor N/2 \rfloor + \lfloor N^{1/2+\beta} \rfloor}{\lfloor N/2 \rfloor - \lfloor N^{1/2+\beta} \rfloor}$$

$$\alpha \leq \frac{N^{1/2+\beta} - \dfrac{1}{2} N^{1/2} + 1}{\dfrac{N}{2} - N^{1/2+\beta} - 1}$$

Оценим вероятность отклонения случайной величины X от $\mathsf{E}X$ на $\alpha\mathsf{E}X$ с помощью леммы 2.

$$P\left\{X > (U-1)\lceil N^{\gamma} \rceil\right\} = P\left\{X > (1+\alpha)\mathrm{E}X\right\}$$

$$P\left\{X > (1+\alpha)\mathrm{E}X\right\} < e^{-(5/9)\alpha^2 \mathrm{E}X} \le$$
$$\le exp\left(-\frac{5}{9}\cdot\frac{\left(N^{1/2+\beta}-\frac{1}{2}N^{1/2}+1\right)^2\left(2\left(N/2-N^{1/2+\beta}+1\right)N^{\gamma}\right)}{\left(\frac{N}{2}-N^{1/2+\beta}-1\right)^2\left(N^{1/2}-1\right)}\right)$$

Для достаточно больших N

$$P\left\{X > (1+\alpha)\mathrm{E}X\right\} \le exp\left(-\frac{4}{9}\cdot\frac{N^{2+2\beta+\gamma}}{N^{2+1/2}}\right)$$

По условию

$$\gamma \ge 1/2 - 2\beta + \frac{\ln\left(5\ln N\right)}{\ln N}.$$

Следовательно для достаточно больших N

$$P\left\{X > (U-1)\lceil N^{\gamma}\rceil\right\} \le exp\left(-\frac{4}{9} * N^{\frac{\ln(5\ln N)}{\ln N}}\right) \le \frac{1}{N^{2.1}}.$$

Оценим теперь вероятность того, что хотя бы в одну последовательность $\lceil N^{\gamma}\rceil$ **подряд идущих** контейнеров будет назначено множество прямоугольников с суммарной высотой превосходящей $(U-1)\lceil N^{\gamma}\rceil$ (обозначим это событие за B). Последовательность подряд идущих контейнеров с номерами с i-го по $(i+\lceil N^{\gamma}\rceil-1)$-й назовем i-ой группой контейнеров (всего имеется $d-\lceil N^{\gamma}\rceil+1$ групп). За B_i обозначим событие назначения прямоугольников с суммарной высотой, превосходящей $(U-1)\lceil N^{\gamma}\rceil$ в контейнеры i-ой группы,

$$B = \bigcup_{i=1}^{d-\lceil N^{\gamma}\rceil+1} B_i.$$

$$\mathsf{P}(B) \le \sum_{i=1}^{d-\lceil N^{\gamma}\rceil+1} \mathsf{P}(B_i) < \left(d-\lceil N^{\gamma}\rceil+1\right)\frac{1}{N^2} < \frac{1}{N^{1.1}}$$

Покажем теперь, что если событие B не произошло, то в процессе упаковки прямоугольников в пирамиду по предложенному алгоритму хотя бы в одном из нижних $\lceil N^{\gamma}\rceil$ контейнеров достаточно места для упаковки прямоугольника высоты 1 (одновременно нижние $\lceil N^{\gamma}\rceil$ контейнеров не могут быть заполнены на $U-1$).

Пусть это не так и каждый из $\lceil N^{\gamma} \rceil$ нижних контейнеров заполнен более, чем на $U-1$. Вспомним, что j-й контейнер имеет ширину $j\alpha$. Найдем минимальный номер контейнера i такой, что $i \le d - \lceil N^{\gamma} \rceil$ и все контейнеры с i-го по d-й заполнены более, чем на $U-1$. Тогда утверждается, что в i-ую группу контейнеров (с номерами от i до $i+\lceil N^{\gamma} \rceil - 1$) были назначены прямоугольники с суммарной высотой превосходящей $(U-1)\lceil N^{\gamma} \rceil$. Действительно, в i-ую группу контейнеров по определению индекса i упаковано множество прямоугольников с суммарной высотой превосходящей $(U-1)\lceil N^{\gamma} \rceil$, а так как либо $i=1$, либо в $(i-1)$-й контейнер можно упаковать прямоугольник высоты 1, то все контейнеры упакованные в i-ую группу были в нее и назначены. Получено противоречие.

Лемма 5.

$$\mathsf{M}\{k_0+1, k_1\} = O\left(N^{\frac{1}{2}}(\log N)^{3/2}\right)$$

Доказательство. Разделим отрезок $[0,1/4]$ на

$$n = \left\lfloor \frac{\ln N}{6\ln(5\ln N)} \right\rfloor$$

одинаковых частей. Введем обозначение M_i,

$$\mathsf{M}_i = \mathsf{M}\left\{\lfloor N/2 \rfloor - \lfloor N^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4n}i} \rfloor, \lfloor N/2 \rfloor - \lfloor N^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4n}(i-1)} \rfloor\right\}.$$

$$\mathsf{M}\{k_0+1, k_1\} = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{M}_i = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{M}\left\{\lfloor N/2 \rfloor - \lfloor N^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4n}i} \rfloor, \lfloor N/2 \rfloor - \lfloor N^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4n}(i-1)} \rfloor\right\}$$

Оценим M_i для $2 \le i \le n$.

Применим лемму 4 для параметров

$$\beta = \frac{i-1}{4n},$$

$$\gamma = \frac{1}{2} - \frac{i-1}{3n}.$$

Очевидно, что

$$\gamma \ge \frac{1}{2} - 2\beta + \frac{\ln(5\ln N)}{\ln N}$$

и алгоритмом было упаковано $\lfloor\frac{N}{2}\rfloor-\lfloor N^{1/2+\beta}\rfloor$ прямоугольников (условия леммы 4 выполняются). Следовательно нижние $\lceil N^{\gamma}\rceil$ контейнеров пирамиды к моменту упаковки $\lfloor\frac{N}{2}\rfloor-\lfloor N^{1/2+\beta}\rfloor$ прямоугольников не могут быть все заняты более чем на $U-1$ и следовательно прямоугольник может выпасть только если будет назначен в один из нижних $\lceil N^{\gamma}\rceil$ контейнеров пирамиды. Всего в пирамиде d контейнеров, то есть вероятность того, что каждый прямоугольник из рассматриваемого диапазона может выпасть не превосходит

$$\frac{\lceil N^{\gamma}\rceil}{d}.$$

Всего прямоугольников в диапазоне

$$\left(\lfloor N/2\rfloor-\lfloor N^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4n}i}\rfloor,\lfloor N/2\rfloor-\lfloor N^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4n}(i-1)}\rfloor\right)$$

не более $N^{\frac{1}{2}+\frac{i}{4n}}$. Следовательно

$$\mathrm{M}_i=\mathrm{M}\left\{\lfloor N/2\rfloor-\lfloor N^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4n}i}\rfloor,\lfloor N/2\rfloor-\lfloor N^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4n}(i-1)}\rfloor\right\}=$$

$$=O\left(\frac{N^{\frac{1}{2}+\frac{i}{4n}}\cdot N^{\frac{1}{2}-\frac{i-1}{3n}}}{N^{1/2}}\right)=O\left(N^{\frac{1}{2}+\frac{-i+4}{12n}}\right).$$

Для $i\geq 5$ $\quad \mathrm{M}_i=O(N^{\frac{1}{2}-\frac{1}{12n}})$.

$$\sum_{i=5}^{n}\mathrm{M}_i=O\left(nN^{\frac{1}{2}-\frac{1}{12n}}\right)=O\left(\log N\frac{N^{\frac{1}{2}}}{\operatorname{loglog} N}\right)=O(N^{\frac{1}{2}}\log N).$$

Кроме того

$$\sum_{i=2}^{4}\mathrm{M}_i=O(3\cdot M_2)=O\left(N^{\frac{1}{2}+\frac{1}{6n}}\right)=O\left(N^{\frac{1}{2}+\frac{\ln 5\ln N}{\ln N}}\right)=O\left(N^{\frac{1}{2}}\log N\right).$$

Для $i=1$ количество прямоугольников в отрезке

$$\left(\lfloor N/2\rfloor-\lfloor N^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4n}}\rfloor,\lfloor N/2\rfloor-\lfloor N^{\frac{1}{2}}\rfloor\right)$$

есть

$$O\left(N^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4n}}\right)=O\left(N^{\frac{1}{2}}(\log N)^{3/2}\right)$$

Итого

$$\mathrm{M}\{k_0+1,k_1\} = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{M}_i = O\left(N^{\frac{1}{2}}(\log N)^{3/2}\right)$$

Лемма 5 доказана а вместе с ней и теорема.

Список литературы

[1]. Baker B. S., Coffman E. J., Rivest R. L. Orthogonal packings in two dimensions. SIAM J. Computing. 1980. V. 9. 4. P. 846-855.

[2]. Baker B. S., Schwartz J. S. Shelf algorithms for two dimensional packing problems. SIAM J. Computing. 1983. V. 6. 2. P. 508-525.

[3]. Shor P. W. The average-case analysis of some on-line algorithms for bin packing. Combinatorica. 1986. V. 6. 2. P. 179-200.

[4]. Coffman E. G., Jr, Shor P. W. Packing in two dimensions: Asymptotic average-case analysis of algorithms. Algorithmica. 1993. V. 9. 3. P. 253-277.

[5]. Кузюрин Н. Н., Поспелов А. И. Вероятностный анализ нового класса алгоритмов упаковки прямоугольников в полосу. ЖВМиМФ. 2011. Т. 51, N 10, с. 1931-1936.

[6]. Кузюрин Н. Н., Поспелов А. И. Вероятностный анализ шельфовых алгоритмов упаковки прямоугольников в полосу. Дискретная математика. 2006. Т. 18. 1. С. 76-90.

[7]. Csirik J., Woegenger G.J. Shelf algorithm for on-line strip packing, Inf. Process. Letters, 1997, v. 63, N 4, P. 171-175.

[8]. Трушников М.А., Об одной задаче Коффмана-Шора, связанной с упаковкой прямоугольников в полосу, Труды ИСП РАН, 2012 г., т. 22, с. 456-462.

Probabilistic analysis of a new strip packing algorithm

Mikhail Trushnikov
(Microsoft Corporation, Redmond, Washington, 98052, USA)

Abstract. In 1993 Coffman and Shor proposed on-line strip packing algorithm with expected unpacked area (waste area) of order O(n^{2/3}) in a standard probabilistic model, where n is the number of rectangles. In the standard probabilistic model the width and height of each rectangle are independent random variables with uniform distribution in [0,1]. It is well-known that optimal packing has expected waste of order O(n^{1/2}) and there exists off-line polynomial algorithm that provides this bound. During more than 10 years the question concerning the possibility to obtain similar upper bound in the class of on-line packing algorithms was open. It was also known that in the class of popular so-called shelf algorithms the bound O(n^{2/3}) cannot be improved. In this paper we give positive answer to this question. We analyze new packing algorithm proposed recently by the author and prove new upper bound of unpacked area of order O(n^{1/2} (log n)^{3/2}) which is almost optimal up to logarithmic factor. The only restriction is the following: we must know the number n of rectangles in advance (exactly as in algorithm of Coffman and Shor). In a popular terminology concerning on-line algorithms this means that our algorithm is closed-end on-line algorithm.

Keywords: on-line strip packing algorithm, probabilistic analysis of packing quality

References

[1]. Baker B. S., Coffman E. J., Rivest R. L. Orthogonal packings in two dimensions. SIAM J. Computing. 1980. V. 9. N 4. P. 846-855.

[2]. Baker B. S., Schwartz J. S. Shelf algorithms for two dimensional packing problems. SIAM J. Computing. 1983. V. 6. N 2. P. 508-525.

[3]. Shor P. W. The average-case analysis of some on-line algorithms for bin packing. Combinatorica. 1986. V. 6. N 2. P. 179-200.

[4]. Coffman E. G., Jr, Shor P. W. Pack ing in two dimensions: Asymptotic average-case analysis of algorithms. Algorithmica. 1993. V. 9. N 3. P. 253-277.

[5]. Kuzyurin N.N., Pospelov A. I. Veroyatrnostnyi analiz novogo klassa algoritmov upakovki pryamougolnikov v polosu [Probabilistic analysis of a new class of strip packing algorithms]. JVMiMF [Journal of computational mathematics and mathematicak physics]. 2011. V. 51, N 10, p. 1931-1936. (in Russian)

[6]. Kuzyurin N.N., Pospelov A. I.. Veroyatnostnyi analiz phelfovyh algoritmov upakovki pryamougolnikov v polosu [Probabilistic analysis of shelf strip packintg algorithms]. Discretnaya matematika [Discrete mathematics]. 2006. V. 18. N 1. P. 76-90. (in Russian)

[7]. Csirik J., Woegenger G.J. Shelf algorithm for on-line strip packing, Inf. Process. Letters, 1997, v. 63, N 4, P. 171-175.

[8]. Trushnikov M. A., Ob odnoi zadache Koffmana-Shora, svyazannoi s urakovkoi pryamougolnikov v pollosu [On Coffman-Shor problem related to packing rectangles into a strip], Trudy ISP RAN [Proceedings of ISP RAS], 2012 , v. 22, p. 456-462. (in Russian)